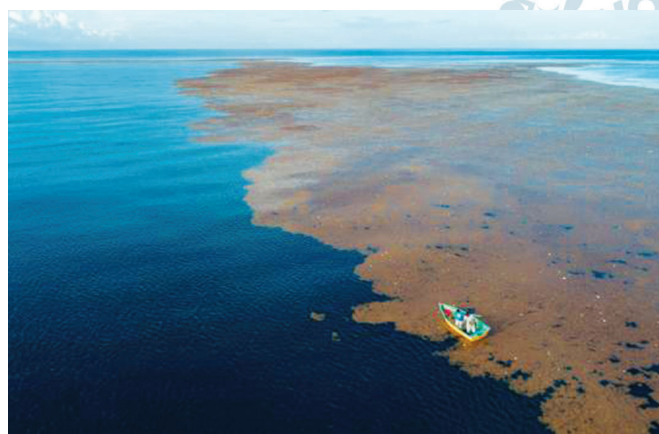


## 1

As águas cristalinas do Caribe foram manchadas por uma invasão de sargaço, algas marrons que formam grandes ilhas flutuantes consideradas ecossistemas, onde se alimentam peixes, caranguejos e aves. O principal fator que contribui para a formação dessas ilhas de sargaço é a produção agrícola, com o uso de fertilizantes na região do Rio Amazonas. Os fertilizantes são arrastados pelas chuvas para o rio e chegam ao Oceano Atlântico. Em junho de 2018 a biomassa de sargaço atingiu mais de 20 milhões de toneladas.

(“Agricultura na Amazônia ‘alimenta’ formação de mancha gigante de algas marrons. <https://oglobo.globo.com>, 03.08.2019. Adaptado.)



(www.diariolibre.com)

- a) Como é denominado o fenômeno decorrente do lançamento de fertilizantes no Oceano Atlântico, que contribui para a formação das ilhas de sargaço? Considere que em uma ilha de sargaço se alimentam uma espécie de peixe e uma espécie de ave. Esquematize uma pirâmide ecológica de biomassa que represente essa cadeia alimentar, indicando nessa pirâmide os organismos que a compõem.
- b) A qual tipo de produtividade primária correspondem as 20 milhões de toneladas de biomassa de sargaço? Justifique sua resposta.

### Resolução

- a) O fenômeno é conhecido por eutrofização, isto é, águas ricas em nutrientes minerais.

A pirâmide ecológica de biomassa pode ser representada por:



- b) Os 20 milhões de toneladas de biomassa de sargaço constitui a produtividade primária líquida que representa a produtividade primária bruta (total de fotossíntese) subtraída da respiração da biomassa, segundo a fórmula  $PPL = PPB - R$

## 2

Em células-tronco embrionárias (CTEs), o potencial de pluripotência pode variar entre as células oriundas de um mesmo embrião. À medida que o embrião se desenvolve, as células-tronco alteram a quantidade de determinados microRNAs, pequenas moléculas de RNA que apresentam uma sequência de nucleotídeos complementar à de um RNA mensageiro. Os microRNAs degradam ou impedem a tradução dos RNAs mensageiros a que se associam e, dessa forma, contribuem para a manutenção da pluripotência das CTEs.

O entendimento desses mecanismos de regulação da pluripotência pode auxiliar as pesquisas com as CTEs e também com as células-tronco pluripotentes induzidas (iPS), obtidas a partir de células adultas de pacientes, modificadas em laboratório?

(“Novos mecanismos que regulam a pluripotência em células-tronco embrionárias são desvendados”.  
www.portaldaenfermagem.com.br, 18.08.2019. Adaptado.)

- a) Qual é a sequência de bases nitrogenadas no microRNA que se liga à sequência de bases CAGU de um RNA mensageiro? Cite outra molécula de RNA que pode se ligar ao RNA mensageiro.
- b) No que consiste a pluripotência das CTEs? Qual a vantagem do uso de células iPS na formação de tecidos para transplantes?

### Resolução

- a) A sequência de bases nitrogenadas no micro RNA que se liga a CAGU será GUCA. A outra molécula de RNA que se liga ao RNA mensageiro é o RNA transportador.
- b) A pluripotência das CTEs consiste em sua capacidade de se dar origem a todos os tecidos do corpo humano. A vantagem do uso das iPS na formação de tecidos para transplantes é reduzir a possibilidade de rejeição.

### 3

Dois ecólogos viram um toco de árvore que, à primeira vista, parecia estar morto, porém, notaram que ele estava vivo. Intrigados, os cientistas instalaram no toco e em uma árvore ao lado instrumentos para medir o fluxo de água.

Os resultados mostraram que o funcionamento das duas plantas estava intimamente interligado. Nos dias de sol, a árvore absorvia água do solo, enquanto o toco permanecia dormente. À noite, era o toco que se hidratava, e a árvore não absorvia mais água. Ao que tudo indica, a fusão de várias raízes criou um verdadeiro sistema de encanamento compartilhado no solo daquela floresta.

(A. J. Oliveira. "O toco de árvore que se recusa a morrer".  
<https://super.abril.com.br>, 29.07.2019. Adaptado.)

- a) Durante a noite, como se apresentavam os ostíolos dos estômatos nas folhas da árvore? Qual a consequência desse comportamento dos ostíolos em relação ao fluxo de dióxido de carbono da atmosfera para o mesófilo?
- b) Em qual tecido vegetal os ecólogos mediram o fluxo de água presente no toco e na árvore? Por que somente a hidratação não justifica o toco estar vivo?

#### Resolução

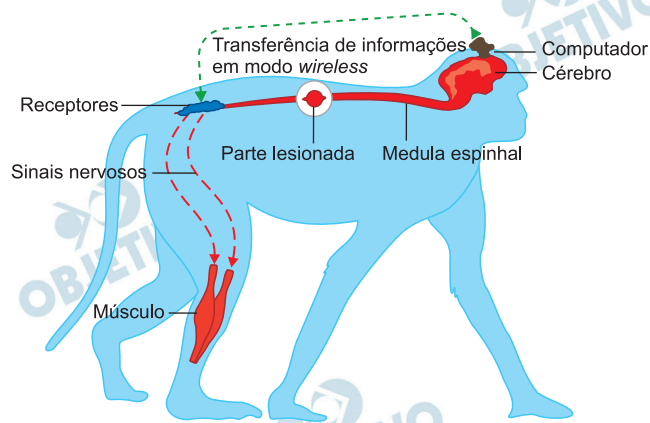
- a) **Durante à noite, os ostíolos dos estômatos nas folha da árvore estavam fechados. Em consequência do fechamento estomático, o fluxo de difusão do CO<sub>2</sub> paralisou.**
- b) **O fluxo de água ocorre através do xilema ou lenho. A manutenção da vida do toco é devido à presença da matéria orgânica transportada da árvore para ele.**

## 4

Pesquisadores conseguiram fazer com que macacos que sofriam de paralisia em uma das pernas, devido a lesões na espinha, pudessem retomar o movimento com o uso de um dispositivo *wireless* implantado no cérebro.

Os macacos tiveram *chips* implantados nas partes do cérebro que controlam o movimento. Os *chips* detectam os impulsos elétricos com as instruções para mexer a perna e enviam os dados para um computador sobre a cabeça dos macacos.

O computador decifra as mensagens e envia as instruções em modo *wireless* para receptores, adaptados à coluna, que estimulam os nervos correspondentes por meio de sinais elétricos. A transferência de informações em modo *wireless* ocorre sempre em um único sentido.



(Janus Gallagher. "Tecnologia wi-fi ajuda a reverter paralisia em macacos", 10.11.2016. [www.bbc.com](http://www.bbc.com). Adaptado.)

- Que células interagem com os *chips* implantados no cérebro dos macacos? Como se denominam os nervos que conectam a medula espinhal às células musculares que movimentam a perna dos macacos?
- Ao espetar com um alfinete a perna que sofre paralisia, há reação de afastamento repentino da perna, porém os macacos não sentem que foram espetados. Qual o papel da medula espinhal nesse afastamento repentino? Por que a transferência de informações em modo *wireless* não permite que os macacos sintam que essa perna foi espetada pelo alfinete?

### **Resolução**

- a) As células do macaco que interagem com os *chips* implantados no seu cérebro são os neurônios. Os nervos que conectam a medula espinhal às células musculares que movimentam a perna dos macacos são denominados motores, eferentes ou eferentes.
- b) A medula espinhal contém os neurônios associativos que completam o arco reflexo, transmitindo o impulso nervoso dos neurônios sensoriais para os neurônios motores. A transferência de informações em modo *wireless* é eferente ou motora. A espetada não é sentida, porque foi lesionada a via sensorial que atinge o encéfalo do animal.

A *Klebsiella pneumoniae* é uma bactéria oportunista de um grupo que está entre os microrganismos que mais causam infecções hospitalares e que mais têm desenvolvido resistência a antibióticos nos últimos anos. Outro microrganismo desse grupo é a *Klebsiella pneumoniae carbapenemase*, uma superbactéria.

Pesquisadores analisaram *K. pneumoniae* presentes na urina de 48 pessoas diagnosticadas com infecção urinária. Em duas pessoas as bactérias apresentaram um fenótipo de virulência, conhecido como hiper mucoviscosidade, em que as bactérias produzem grande quantidade de um biofilme espesso e viscoso, que adere as bactérias ao epitélio da bexiga e as protege, tornando difícil sua eliminação.

(Karina Toledo. "Bactérias multirresistentes são identificadas fora de ambiente hospitalar". <http://agencia.fapesp.br>, 21.08.2019. Adaptado.)

- a) A qual gênero pertence a superbactéria *Klebsiella pneumoniae carbapenemase*? Cite uma característica exclusiva das bactérias que as integra ao Reino Monera.
- b) O que é uma bactéria oportunista? Do ponto de vista evolutivo e devido ao tratamento com antibióticos, como o fenótipo hiper mucoviscosidade pode se tornar predominante ao longo do tempo?

### Resolução

- a) **O gênero ao qual pertence a superbactéria é *Klebsiella*. Como característica exclusiva das bactérias, tem-se o DNA circular, ausência de núcleo organizado e ausência de organelas membranosas.**
- b) **A bactéria oportunista é aquela que se aproveita da debilidade imunitária do organismo parasitado, provocando uma infecção. Os antibióticos selecionam as bactérias com cápsula mucosa, as quais não são atacadas pelo sistema de defesa do organismo.**



Os gases medicinais são utilizados em hospitais, clínicas de saúde ou outros locais de interesse à saúde, bem como em tratamentos domiciliares de pacientes. Considere a composição de quatro gases medicinais, acondicionados separadamente em quatro cilindros, I, II, III e IV, nas condições indicadas na tabela.

Cilindro	Gás medicinal	Composição	Pressão (kPa)	Volume (L)	Temperatura (°C)
I	oxigênio	O <sub>2</sub>	280	100	20
II	ar sintético	N <sub>2</sub> = 79% O <sub>2</sub> = 21% (porcentagens em volume)	280	100	20
III	óxido nitroso	N <sub>2</sub> O	280	100	20
IV	dióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	280	100	20

- a) Identifique, entre os gases medicinais citados, aquele que é constituído por uma substância química simples e aquele que gera uma solução aquosa ácida ao ser borbulhado em água destilada.
- b) Baseando-se no princípio de Avogadro, determine as seguintes proporções:
- número de moléculas no cilindro I : número de moléculas no cilindro II : número de moléculas no cilindro III : número de moléculas no cilindro IV.
  - número de átomos de oxigênio no cilindro II : número de átomos de oxigênio no cilindro III.

### Resolução

- a) **Substância química simples** é constituída por moléculas formadas por átomos do mesmo elemento químico. Isso corresponde ao cilindro I (gás oxigênio: O<sub>2</sub>).

O cilindro II contém uma amostra de gases e os cilindros III e IV correspondem a substâncias químicas compostas.

O gás medicinal que ao ser borbulhado em água produz uma solução ácida é o dióxido de carbono: CO<sub>2</sub>, por tratar-se de um óxido ácido:



- b) O princípio de Avogadro diz que volumes iguais de gases (ou mistura) na mesma temperatura e pressão contém o mesmo número de moléculas. Como todos os 4 cilindros se encontram na mesma temperatura (20°C), na mesma pressão (280 kPa)



e ocupam o mesmo volume (100 L), todos apresentam o mesmo número de moléculas.

$$N^{\circ} \text{ de moléculas}_I = N^{\circ} \text{ de moléculas}_{II} = \\ = N^{\circ} \text{ de moléculas}_{III} = N^{\circ} \text{ de moléculas}_{IV}$$

Proporção de:

$$1 : 1 : 1 : 1$$

No cilindro II, o número de átomos de oxigênio presente será  $2 \times 21\%$  do número de moléculas total do sistema (cada molécula de  $O_2$  é formada por 2 átomos de O).

No cilindro III, o número de átomos de oxigênio será igual ao número de moléculas (cada molécula de  $N_2O$  é formada por 1 átomo de O).

Como o número de moléculas nos cilindros II e III são iguais, a proporção entre o número de átomos de oxigênio nesses cilindros será de:

$$2 \times 0,21 : 1$$

$$0,42 : 1$$

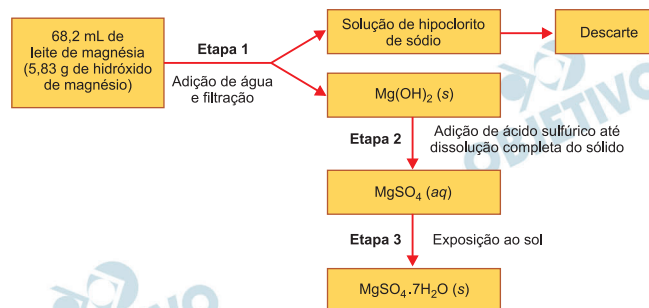
$$42 : 100$$

$$21 : 50$$

O leite de magnésia é uma suspensão aquosa. Determinada embalagem desse produto mostra a seguinte composição:

*Cada 15 mL contém: hidróxido de magnésio (1 282,50mg), hipoclorito de sódio e água purificada.*

Um grupo de estudantes resolveu utilizar uma amostra desse leite de magnésia, que se encontrava com data de validade expirada para ingestão humana, a fim de obter sulfato de magnésio hepta-hidratado, a ser utilizado em laboratório escolar como reagente para testes qualitativos. Para tanto, executaram o procedimento ilustrado a seguir.

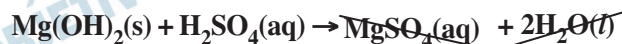


- Represente, por meio de fórmula, as ligações químicas presentes no hidróxido de magnésio,  $\text{Mg}(\text{OH})_2$ . Cite o nome do método de separação de misturas empregado pelos estudantes na última etapa do procedimento.
- Escreva a equação da reação química que ocorre na etapa 2. Calcule a massa de sulfato de magnésio hepta-hidratado obtida pelos estudantes, admitindo que o rendimento foi de 100%.

### Resolução

- Hidróxido de magnésio:  $\text{Mg}(\text{OH})_2$**   
 $\text{Mg}^{2+} [\text{O} - \text{H}]_2^-$   
 Na última etapa, ocorreu a **evaporação** da água com a exposição ao sol.

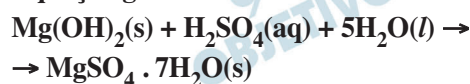
- Equação química que representa a reação que ocorre na etapa 2.**



Etapa 3:



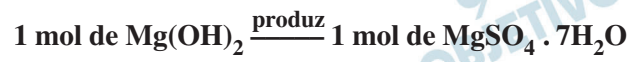
Equação global:



$$M_{(\text{Mg}(\text{OH})_2)} = (1 \cdot 24,3 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 1) \text{ g/mol} = 58,3 \text{ g/mol}$$

$$M_{(\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O})} = (1 \cdot 24,3 + 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 + 7 \cdot 18) \text{ g/mol} = 246,3 \text{ g/mol}$$

De acordo com a equação global, temos:



$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 58,3\text{g} & \text{—————} & 246,3\text{g} \\ 5,83\text{g} & \text{—————} & x \\ x = 24,63\text{g} & & \end{array}$$

Considere as seguintes características de um suco de limão fresco:

- pH = 2
- teor de vitamina C (ácido ascórbico,  $C_6H_8O_6$ ) = 80 mg / 100 mL

Uma limonada foi preparada com a diluição de um copo (200 mL) desse suco em água, até completar o volume de 2 litros.

- Calcule a concentração de vitamina C no suco de limão fresco, em % (m/V) e em mol/L.
- Calcule a concentração de íons  $H^+(aq)$  no suco de limão fresco. Determine o pH da limonada preparada com esse suco.

### Resolução

$$a) \quad 0,08g \text{ ————— } 100 \text{ mL} \therefore \quad 0,08\% \text{ (m/V)}$$

$$M_{C_6H_8O_6} = (6 \cdot 12 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 16) \text{ g/mol} = 176 \text{ g/mol}$$

$$1 \text{ mol ————— } 176g$$

$$x \text{ ————— } 0,08g$$

$$x = 4,55 \cdot 10^{-4} \text{ mol de vitamina C}$$

(vitamina C)                      (suco de limão)

$$4,55 \cdot 10^{-4} \text{ mol ————— } 100 \text{ mL}$$

$$y \text{ ————— } 1000 \text{ mL}$$

$$y = 4,55 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

$$\therefore \quad M = 4,55 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$$

- Suco de limão fresco:

$$pH = 2$$

$$-\log [H^+] = 2 \quad [H^+] = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$$

(suco de limão)      (limonada)

$$M_1 \cdot V_1 = M_2 \cdot V_2$$

$$10^{-2} \text{ mol/L} \cdot 200 \text{ mL} = M_2 \cdot 2000 \text{ mL}$$

$$M_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$$

Limonada:

$$[H^+] = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$$

$$pH = -\log [H^+]$$

$$pH = -\log 10^{-3}$$

$$pH = 3$$

Considere o experimento:

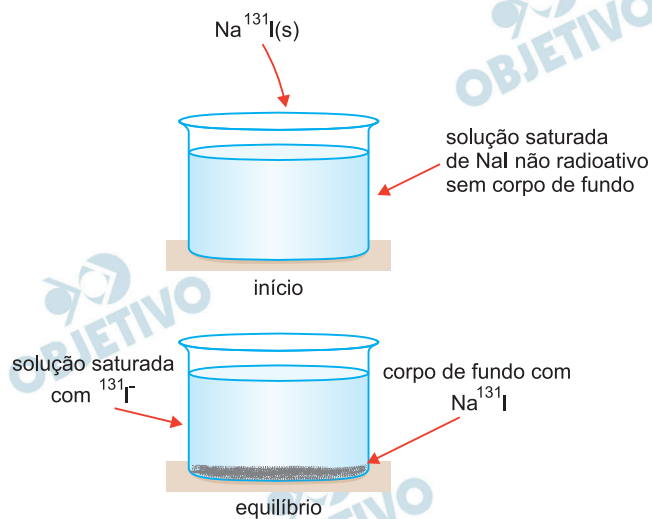
Uma porção de iodeto de sódio sólido, radioativo, cujo ânion  $^{131}\text{I}^-$  é radioativo, foi adicionada a uma solução aquosa saturada, sem corpo de fundo, de iodeto de sódio ( $\text{NaI}$ ) não radioativo, formando uma solução saturada com corpo de fundo.

Após algum tempo, a mistura foi filtrada e a intensidade da radiação foi verificada no sólido retido no filtro e na solução saturada. Foi constatado que a solução saturada, inicialmente não radioativa, tornou-se radioativa, e que o sólido apresentou menor intensidade de radiação do que apresentava antes de ser adicionado à solução.

- Calcule o número de nêutrons e de elétrons do ânion  $^{131}\text{I}^-$ .
- Escreva a equação química que representa o equilíbrio de solubilidade do iodeto de sódio em água. Baseando-se no conceito de equilíbrio químico e no comportamento das espécies químicas em nível microscópico, justifique por que a radioatividade do sólido diminuiu e a solução saturada tornou-se radioativa.

### Resolução

- $^{131}_{53}\text{I}^-$   
 $A = N + Z \therefore 131 = N + 53$   
 $N = 78; e^- = 54$



A equação de equilíbrio de solubilidade é dada por:

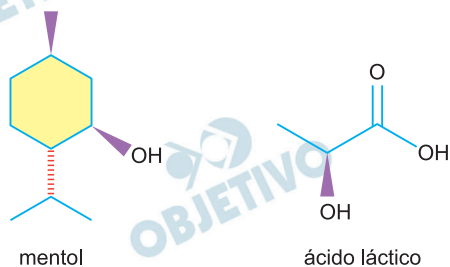


solução saturada

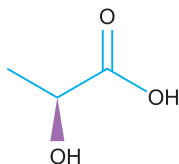
A radioatividade do sólido diminui pois uma parte do  ${}^{131}\text{I}$  radioativo sólido vai para a solução conforme o equilíbrio de solubilidade acima.

A solução saturada tornou-se radioativa devido à presença de íons  ${}^{131}\text{I}^-(\text{aq})$ .

O lactato de mentila é um éster utilizado em cremes cosméticos para a pele, com a finalidade de dar sensação de refrescância após a aplicação. Esse éster é obtido pela reação entre mentol e ácido láctico, cujas fórmulas estruturais estão representadas a seguir.



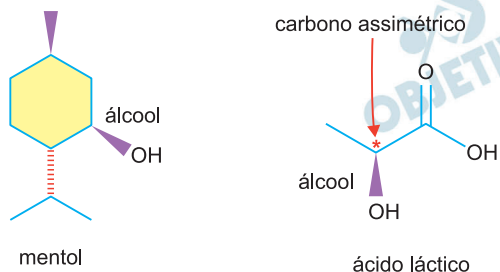
- a) Cite o nome da função orgânica comum ao mentol e ao ácido láctico. Indique, na estrutura do ácido láctico reproduzida no campo de Resolução e Resposta, o átomo de carbono assimétrico.



- b) Utilizando fórmulas estruturais, escreva a equação química que representa a formação do lactato de mentila a partir do mentol e do ácido láctico. Analisando a estrutura do lactato de mentila, justifique por que esse éster apresenta baixa solubilidade em água.

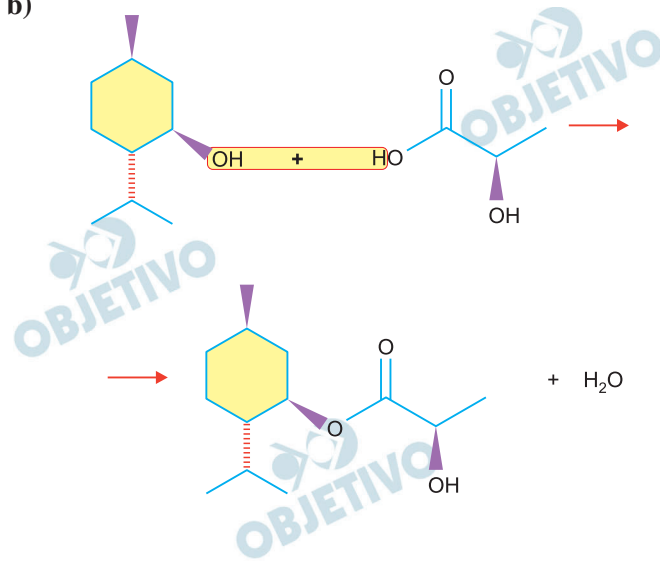
### Resolução

a)





b)



Esse éster apresenta baixa solubilidade em água (polar), pois predomina cadeia hidrocarbônica que é apolar.

Um foguete de massa  $M$  partiu do repouso da posição A, no solo horizontal, e subiu verticalmente, monitorado por um radar que o seguiu durante determinado trecho de seu percurso, mantendo-se sempre apontado para ele. A figura 1 mostra o foguete na posição B, a 8 500 m de altura, com a linha que liga o radar a ele inclinada de um ângulo  $\alpha = 1$  rad em relação à horizontal. Para acompanhar o foguete no trecho AB, o radar girou ao redor de um eixo horizontal que passa por ele, com velocidade angular média  $\omega_{\text{méd}} = 0,02$  rad/s. Um pouco mais tarde, ao passar pela posição C, com velocidade de 4 600 km/h, o primeiro estágio do foguete (de cor azul, nas figuras), de massa  $\frac{M}{3}$ , desacoplou-se do restante do veículo. Imediatamente

após o desacoplamento, devido à ação de forças internas, a velocidade escalar do primeiro estágio foi reduzida a 3 000 km/h, na mesma direção e sentido da velocidade do foguete no trecho AB, conforme mostra a figura 2.

FIGURA 1

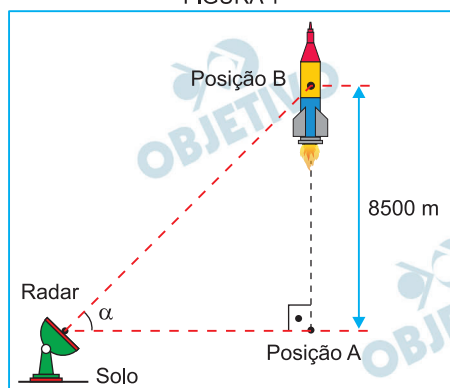
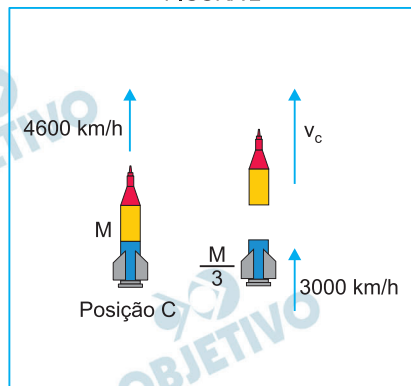


FIGURA 2



Considerando a massa total do foguete (M) constante, calcule:

- a) a velocidade escalar média do foguete, em m/s, no trecho AB de sua subida vertical.
- b) a velocidade escalar instantânea  $v_c$  do foguete, em m/s, sem o primeiro estágio, imediatamente após o desacoplamento ocorrido na posição C.

### Resolução

a) 1) Cálculo do tempo gasto de A para B:

$$\omega_m = \frac{\alpha}{\Delta t} \Rightarrow 0,02 = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{0,02} \text{ s}$$

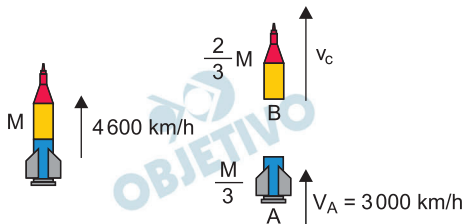
$$\Delta t = 50 \text{ s}$$

2) Cálculo da velocidade escalar média do foguete:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow V_m = \frac{8500 \text{ m}}{50 \text{ s}}$$

$$V_m = 170 \text{ m/s}$$

b) Conservação da quantidade de movimento:



$$Q_f = Q_i$$

$$\frac{M}{3} \cdot 3000 + \frac{2}{3} M v_c = M \cdot 4600$$

$$1000 + \frac{2}{3} v_c = 4600$$

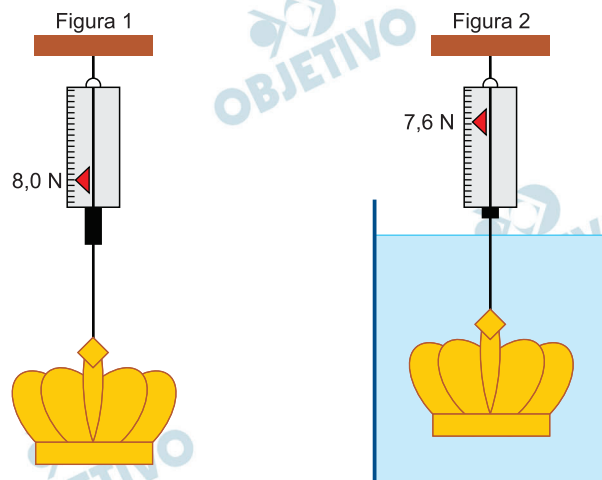
$$\frac{2}{3} v_c = 3600$$

$$v_c = 5400 \text{ km/h}$$

$$v_c = \frac{5400}{3,6} \text{ m/s} = 1500 \text{ m/s}$$

Respostas: a) 170 m/s  
b) 1500 m/s

Para determinar a densidade de uma coroa metálica maciça, foi realizado um experimento em que ela foi pendurada em um dinamômetro ideal por dois modos diferentes: um no ar e outro totalmente imersa na água em equilíbrio contida em um recipiente, de acordo com as figuras 1 e 2, respectivamente. Na primeira situação, o dinamômetro indicou 8,0 N e, na segunda situação, indicou 7,6 N.

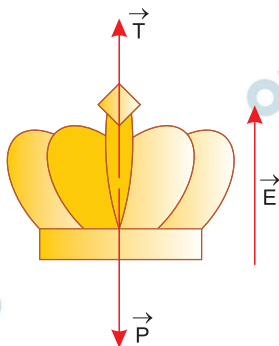


Sabendo que a densidade da água é  $10^3 \text{ kg/m}^3$  e adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,

- represente as forças que agem na coroa na situação da figura 2 e calcule a massa dessa coroa, em kg.
- calcule a densidade, em  $\text{kg/m}^3$ , dessa coroa.

### Resolução

a)



$\vec{T}$  : força aplicada pelo fio

$\vec{P}$  : força gravitacional aplicada pela Terra

$\vec{E}$  : força do empuxo aplicada pela água

Na figura 1:

$$T = P_c = m_c g$$

$$8,0 = m_c \cdot 10$$

$$m_c = 0,80 \text{ kg}$$

b) Na figura 2:

$$T + E = P$$

$$T + \mu_a V g = m g$$

$$7,6 + 1,0 \cdot 10^3 \cdot V \cdot 10 = 8,0$$

$$1,0 \cdot 10^4 V = 0,40$$

$$V = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

A densidade é dada por:

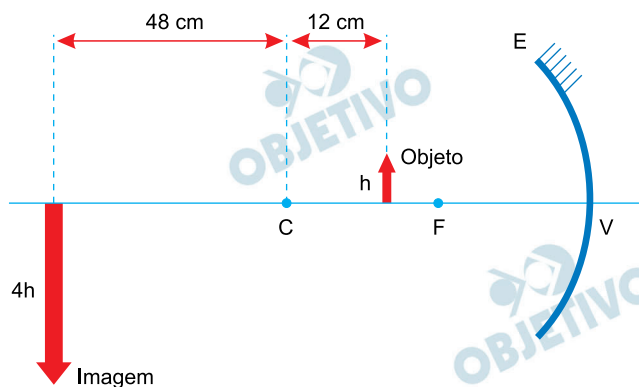
$$\mu_c = \frac{m_c}{V} = \frac{0,80}{4,0} \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_c = 2,0 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$$

Respostas: a) 0,80 kg

b)  $2,0 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$

Um objeto linear é colocado verticalmente em repouso sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo E de centro de curvatura C, foco principal F e vértice V. Nessa situação, esse espelho forma uma imagem real, invertida e quatro vezes maior do que o objeto, como representado na figura.



Em seguida, o objeto é movimentado horizontalmente, com velocidade escalar média  $V_{OB}$  até o ponto C, onde é novamente mantido em repouso; simultaneamente, sua imagem movimentou-se com velocidade escalar média  $V_{IM}$  até sua nova posição final.

Calcule:

a) o valor absoluto da razão  $\frac{V_{IM}}{V_{OB}}$ .

b) a distância focal, em cm, desse espelho.

#### Resolução

a) Se o objeto se desloca para o ponto C, o mesmo ocorre com a imagem, que fica situada sob o objeto, invertida e com o mesmo comprimento deste. Logo:

$$\Delta s_{OB} = -12 \text{ cm e } \Delta s_{IM} = 48 \text{ cm}$$

$$\frac{V_{IM}}{V_{OB}} = \frac{\frac{\Delta s_{IM}}{\Delta t}}{\frac{\Delta s_{OB}}{\Delta t}} = -\frac{48}{12} = -4$$

Em valor absoluto:

$$\frac{V_{IM}}{V_{OB}} = 4$$

$$\text{b) (I) } \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow -\frac{4h}{h} = -\frac{p'}{p}$$

$$p' = 4p \text{ ①}$$

$$p' - p = 60 \text{ ②}$$

$$\text{① em ②: } 4p - p = 60 \Rightarrow 3p = 60$$

$$p = 20 \text{ cm}$$

$$\therefore p' = 80 \text{ cm}$$

Equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{4+1}{80}$$

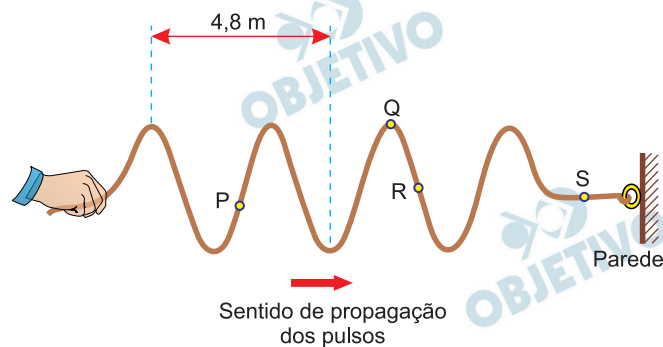
$$f = 16 \text{ cm}$$

Respostas: a) 4

b) 16 cm



Uma corda elástica homogênea tem uma de suas extremidades fixa em uma parede e a outra é segurada por uma pessoa. A partir do repouso, com a corda esticada na horizontal, a pessoa inicia, com sua mão, um movimento oscilatório vertical com frequência constante, gerando pulsos que se propagam pela corda. Após 2 s do início das oscilações, a configuração da corda encontra-se como mostra a figura.

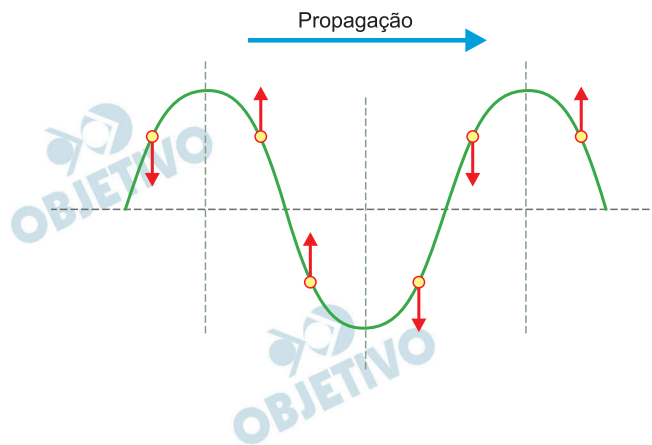


Sabendo que os pulsos gerados na corda estão se propagando para a direita com velocidade escalar constante:

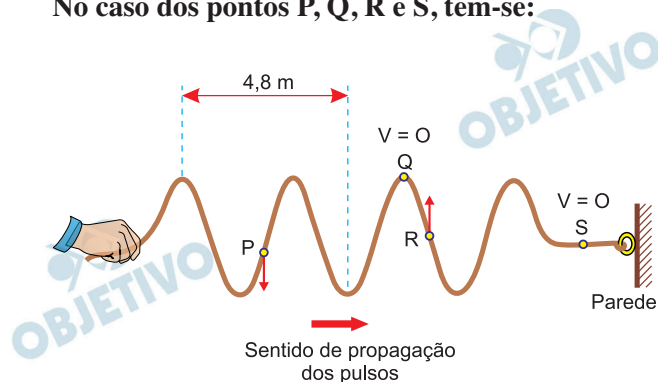
- copie a figura da corda no campo de Resolução e Resposta e represente com setas para cima ( $\uparrow$ ), para baixo ( $\downarrow$ ), para direita ( $\rightarrow$ ) ou para esquerda ( $\leftarrow$ ) a velocidade vetorial instantânea dos pontos da corda P, Q, R e S indicados, no instante representado na figura. Caso a velocidade de algum deles seja nula, escreva  $v = 0$ .
- calcule a velocidade de propagação, em m/s, da onda nessa corda.

### Resolução

- Cada ponto da corda atingido pela perturbação (onda mecânica transversal) oscila verticalmente em movimento harmônico simples (MHS).



No caso dos pontos P, Q, R e S, tem-se:



b) (I) Em  $\Delta t = 2\text{s}$ , ocorreram 3,5 ciclos de oscilação.

Sendo T o período, tem-se:

$$3,5T = \Delta t \Rightarrow \frac{7}{2} T = 2$$

Da qual:  $T = \frac{4}{7} \text{ s}$

(II) Da figura:

$$1,5 \lambda = 4,8 \Rightarrow \lambda = 3,2 \text{ m}$$

$$(III) V = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow V = \frac{3,2}{\frac{4}{7}} \text{ (m/s)}$$

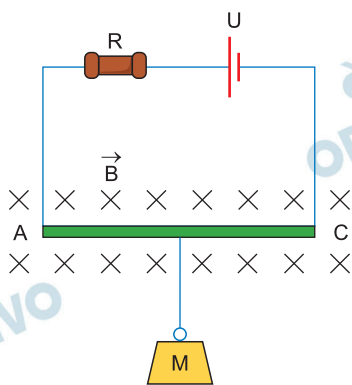
De onde se obtém:

$$V = 5,6 \text{ m/s}$$

Respostas: a) P : ↓  
Q : V = 0  
R : ↑  
S : V = 0

b) 5,6 m/s

A figura representa uma balança eletromagnética utilizada para determinar a massa  $M$  do objeto preso a ela. Essa balança é constituída por um gerador ideal cuja tensão  $U$  pode ser ajustada, por um resistor ôhmico de resistência  $R = 40 \, \Omega$  e por uma barra condutora  $AC$ , de massa e resistência elétrica desprezíveis, conectada ao gerador por fios ideais. A barra  $AC$  mede 50 cm e está totalmente imersa em um campo magnético uniforme de intensidade  $B = 1,6 \, \text{T}$ , perpendicular à barra e ao plano desta folha e apontado para dentro dela. O objeto, cuja massa pretende-se determinar, está preso por um fio isolante e de massa desprezível no centro da barra  $AC$ .



Adotando  $g = 10 \, \text{m/s}^2$  e considerando que, para manter o objeto preso à balança em repouso, será necessário ajustar a tensão do gerador para  $U = 200 \, \text{V}$ , calcule, quando a balança estiver em funcionamento,

- a diferença de potencial, em V, nos terminais do resistor de  $40 \, \Omega$  e a potência dissipada por ele, em W.
- a intensidade da corrente elétrica, em ampères, que atravessa a barra  $AC$  e a massa  $M$ , em kg, do objeto preso a balança.

### Resolução

- Como não há resistência elétrica na barra  $AC$ , então a diferença de potencial no resistor  $R$  é igual à do gerador ideal:

$$U = 200 \, \text{V}$$

A potência dissipada em  $R$  é:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = \frac{(200)^2}{40} \, (\text{W})$$

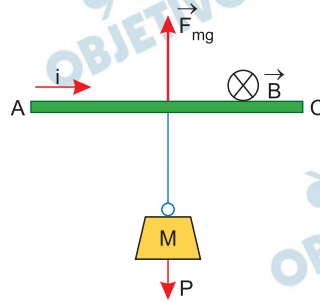
$$P = 1000 \, \text{W}$$

b)  $U = R \cdot i$

$$i = \frac{U}{R} \quad i = \frac{200}{40} \text{ (A)}$$

$$i = 5,0 \text{ A}$$

Equilíbrio da balança:



$$F_{\text{mag}} = P$$

$$B \cdot i \cdot L = M \cdot g$$










$$M = \frac{B \cdot i \cdot L}{g}$$

$$M = \frac{1,6 \cdot 5,0 \cdot 0,50}{10,0} \text{ (kg)} \Rightarrow M = 0,40 \text{ kg}$$

Respostas: a)  $U = 200\text{V}$  e  $P = 1000\text{W}$

b)  $i = 5,0 \text{ A}$  e  $M = 0,40\text{kg}$

A tabela indica o quadro de medalhas dos seis países primeiros colocados nos jogos Pan-Americanos realizados na cidade de Lima, que terminaram em agosto de 2019. Essa edição marcou a conquista do maior número de medalhas pelo Brasil, desde sua primeira participação nos jogos.

Posição	País	 Ouro	 Prata	 Bronze	Total
1	 Estados Unidos	120	88	85	293
2	 Brasil	55	45	71	171
3	 México	37	36	63	136
4	 Canadá	35	64	53	152
5	 Cuba	33	27	38	98
6	 Argentina	32	35	34	101

(www.uol.com.br. Adaptado.)

- a) Admita um novo critério para a classificação dos países no quadro de medalhas, em que a medalha de bronze vale 1 ponto, a de prata vale 2 pontos e a de ouro vale 3 pontos, ordenando-se os países pelo total de pontos obtidos com suas medalhas. Por esse novo critério, Argentina, Brasil, Cuba e EUA passam a totalizar 200, 326, 191 e 621 pontos, respectivamente. Calcule a pontuação do México e do Canadá pelo novo critério, e compare a classificação desses seis países no critério atual com o novo critério.
- b) Sabe-se que os jogos Pan-Americanos acontecem de quatro em quatro anos e que na edição do Rio de Janeiro, em 2007, o Brasil conquistou 157 medalhas. Considerando-se o total de medalhas conquistadas pelo Brasil nas últimas cinco edições desses jogos que aconteceram no século XXI, a mediana e a moda são, ambas, iguais a 141, e a média é igual a 146,6. Determine a sequência crescente do total de medalhas conquistadas pelo Brasil nessas cinco edições dos jogos e calcule o desvio padrão entre o maior (em Lima) e o menor (em Santo Domingo) número de medalhas conquistadas.

### Resolução

- a) As pontuações do México e do Canadá pelo novo critério serão:

$$\text{México: } 37 \cdot 3 + 36 \cdot 2 + 63 \cdot 1 = 246$$

$$\text{Canadá: } 35 \cdot 3 + 64 \cdot 2 + 53 \cdot 1 = 286$$

Comparando as classificações desses 6 países no critério atual com o novo critério, tem-se:

Estados Unidos: permanece na 1ª posição.

Brasil: permanece na 2ª posição.

México: passa da 3ª para a 4ª posição.

Canadá: passa da 4ª para a 3ª posição.

Cuba: passa da 5ª para a 6ª posição.

Argentina: passa da 6ª para a 5ª posição.

- b) De acordo com as informações pode-se organizar os números de medalhas no seguinte rol, onde  $x$  é o menor número de medalhas:

$(x, 141, 141, 157, 171)$

Com a média é 146,6, tem-se:

$$\frac{x + 141 + 141 + 157 + 171}{5} = 146,6 \Rightarrow x = 123$$

Portanto, o rol é 123, 141, 141, 157, 171.

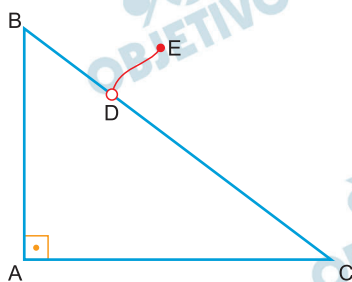
Calculando a variância entre o maior e o menor destes valores:

$$V_{\text{ar}} = \frac{(123 - 147)^2 + (171 - 147)^2}{2} = 576$$

O desvio padrão entre 123 e 171 é, portanto,

$$DP = \sqrt{576} = 24$$

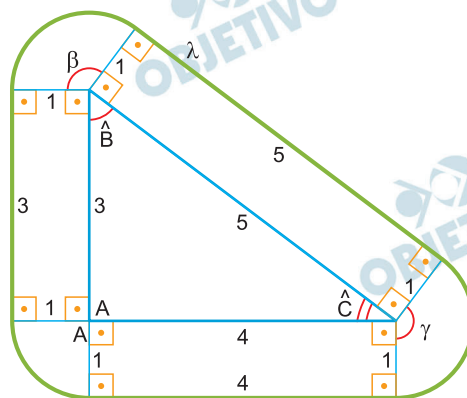
Uma corda de 1 m de comprimento está conectada no ponto D de um triângulo retângulo ABC de ângulo reto no vértice A e medidas  $AB = 3$  m e  $AC = 4$  m. O ponto de conexão, entre a corda e o triângulo pode deslizar livremente por todos os lados do triângulo. Durante o deslocamento do ponto D por todos os lados do triângulo, com o ponto E distando sempre 1 m do triângulo, E descreverá uma curva fechada, contida no plano do triângulo ABC, chamada de  $\lambda$ .



- a) Faça um esboço do desenho de  $\lambda$  e calcule o comprimento dessa curva.  
 b) Seja M o ponto mais distante do vértice B atingido pelo ponto E durante seu deslocamento e  $A'$  a projeção ortogonal do ponto A sobre a hipotenusa do triângulo ABC. Calcule a distância entre os pontos M e  $A'$ .

### Resolução

a)



I) No triângulo ABC, temos:

$$(BC)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}$$

$$\text{II) } \begin{cases} \beta = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \hat{B} \\ \gamma = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \hat{C} \end{cases} \Rightarrow$$

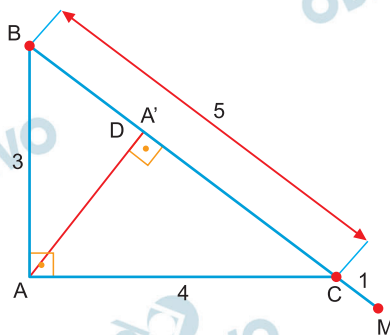
$$\Rightarrow \beta + \gamma = 360^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \beta + \gamma = 270^\circ, \text{ pois } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

III) A soma das medidas dos três arcos de circunferência de  $\lambda$  é igual ao comprimento de uma circunferência de raio 1 m, pois  $90^\circ + \beta + \gamma = 360^\circ$ .



Assim, o comprimento de  $\lambda$  em metros é  
 $3 + 4 + 5 + 2\pi \cdot 1 = 12 + 2\pi = 2 \cdot (6 + \pi)$

b)



No triângulo retângulo ABC, temos:

$$(AC)^2 = (BC) \cdot (A'C) \Rightarrow 4^2 = 5 \cdot (A'C) \Rightarrow$$

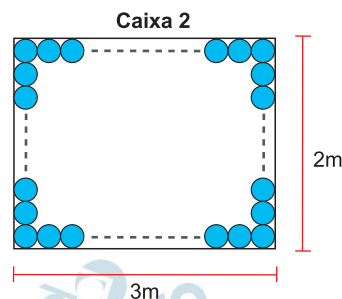
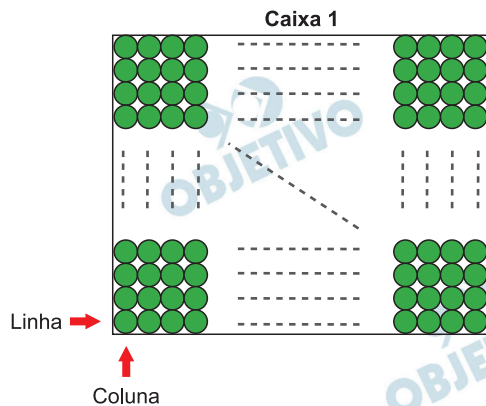
$$\Rightarrow A'C = 3,2 \text{ m}$$

$$\text{Assim, } MA' = A'C + MC = 3,2 + 1 = 4,2 \text{ m}$$

Respostas: a)  $2 \cdot (6 + \pi)$  m

b) 4,2 m

As figuras indicam, em vista superior, duas caixas retangulares. A caixa 1 possui bolas verdes idênticas ao longo de toda a área da sua base, sem superposição e sem espaço entre elas. A caixa 2 possui bolas azuis idênticas ao longo de todo o seu contorno interno, sem superposição e sem espaço entre elas.



- a) Admita que a caixa 1 tenha 1 591 bolas verdes,  $x$  colunas de bolas verdes e  $y$  linhas de bolas verdes. Sabendo que a diferença entre  $x$  e  $y$ , nessa ordem, é igual a 6, calcule  $x$  e  $y$ .
- b) Admita que a caixa 2 tenha 266 bolas azuis e que haja um cubo inscrito em uma dessas bolas. Calcule a medida da aresta desse cubo, sabendo que a base da caixa é um retângulo de 2 metros por 3 metros.

### Resolução

- a) De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1591 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1591}{x} \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{Assim, } x - \frac{1591}{x} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 1591 = 0 \Rightarrow x = 43, \text{ pois } x > 0$$

$$\text{Logo, } x - y = 6 \Rightarrow 43 - y = 6 \Rightarrow y = 37$$

- b) Sendo  $x$  o número de bolas em cada linha e  $y$  o número de bolas em cada coluna, de acordo com o enunciado, temos:

$$\text{I) } 2x + 2y - 4 = 266 \Rightarrow x + y = 135$$

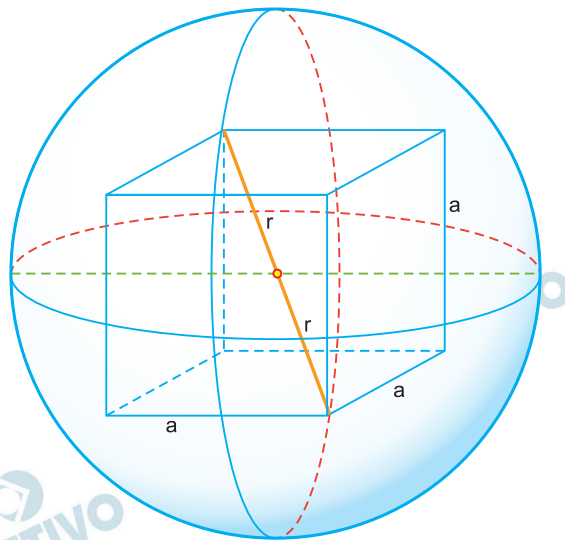
$$\text{II) } \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{3+2} = \frac{135}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 81 \text{ e } y = 54$$

III) Sendo  $r$  a medida do raio de cada esfera, temos:

$$2r \cdot 81 = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{54} \text{ m}$$

IV)



Sendo  $a$  a medida da aresta do cubo, temos:

$2r = \sqrt{3}a$ , pois a diagonal do cubo mede  $2r$ .

$$\text{Assim, } 2 \cdot \frac{1}{54} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{81} \text{ m}$$

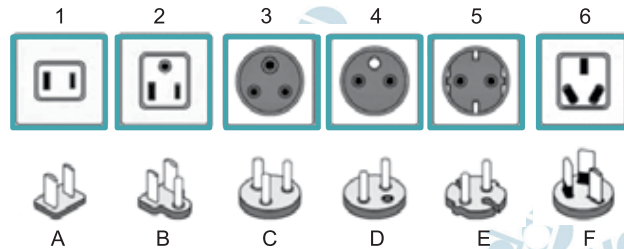
Respostas: a)  $x = 43$  e  $y = 37$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{81} \text{ m}$

A figura indica seis tipos de tomadas e os pinos projetados para nelas se encaixarem (1-A, 2-B, 3-C, 4-D, 5-E e 6-F).

Além dessa correspondência, sabe-se que:

- O pino A também se encaixa na tomada 2.
- O pino D também se encaixa nas tomadas 3 e 5.
- O pino E também se encaixa nas tomadas 3 e 4.



- a) Sorteando-se aleatoriamente um tipo de pino e um tipo de tomada, qual é a probabilidade de que o encaixe entre eles possa ser feito?
- b) Sorteando-se aleatoriamente dois tipos de tomadas e dois tipos de pinos, qual é a probabilidade de que seja possível conectar um deles a uma tomada e o outro a outra?

### Resolução

- a) Sendo  $p$  a probabilidade de sortear, aleatoriamente, um pino e um tipo de tomada, e que o encaixe entre eles possa ser feito, temos:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

- b) I) O número de casos possíveis é dado por:

$$C_{6,2} \cdot C_{6,2} = 15 \cdot 15 = 225$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 n°. de sorteios de duas tomadas  
 n°. de sorteios de dois pinos

- II) Analisando o número de casos favoráveis para cada sorteio de dois pinos:

Pinos A e B: ① (A e 1, B e 2)

Pinos A e C: ② (A e 1, C e 3); (A e 2, C e 3)

Pinos A e D: ⑥ (A e 1, D e 3); (A e 1, D e 4);  
 (A e 1, D e 5); (A e 2, D e 3);  
 (A e 2, D e 4); (A e 2, D e 5)

Pinos A e E: ⑥ (A e 1, E e 3); (A e 1, E e 4);  
(A e 1, E e 5); (A e 2, E e 3);  
(A e 2, E e 4); (A e 2, E e 5)

Pinos A e F: ② (A e 1, F e 6); (A e 2, F e 6)

Pinos B e C: ① (B e 2, C e 3)

Pinos B e D: ③ (B e 2, D e 3); (B e 2, D e 4);  
(B e 2, D e 5)

Pinos B e E: ③ (B e 2, E e 3); (B e 2, E e 4);  
(B e 2, E e 5)

Pinos B e F: ① (B e 2, F e 6)

Pinos C e D: ② (C e 3, D e 4); (C e 3, D e 5)

Pinos C e E: ② (C e 3, E e 4); (C e 3, E e 5)

Pinos C e F: ① (C e 3, F e 6)

Pinos D e E: ③ modos de escolher duas  
tomadas entre 3, 4 e 5:  $C_{3,2} = 3$

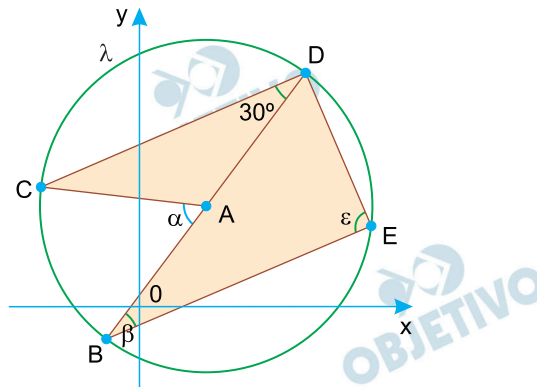
Pinos D e F: ③ (D e 3, F e 6); (D e 4, F e 6)  
(D e 5, F e 6)

Pinos E e F: ③ (E e 3, F e 6); (E e 4, F e 6)  
(E e 5, F e 6)

Assim, o total de casos favoráveis é 39 e

portanto a probabilidade é  $p = \frac{39}{225} = \frac{13}{75}$

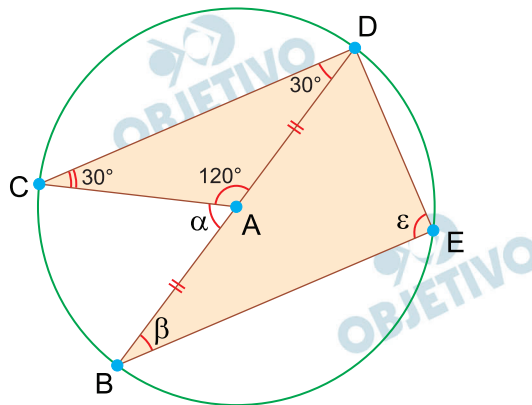
No plano cartesiano de eixos ortogonais foi desenhada uma circunferência  $\lambda$ , de centro A e equação geral  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ . Os pontos B, C, D e E pertencem a  $\lambda$ , sendo  $\overline{BD}$  um diâmetro de  $\lambda$ . Sabe-se ainda que a medida do ângulo  $\hat{CDB}$  é de  $30^\circ$  e que  $\overline{CD}$  e  $\overline{BE}$  são segmentos paralelos.



- a) Determine as medidas dos ângulos  $\hat{CAB}$ ,  $\hat{DBE}$  e  $\hat{BED}$ , indicadas na figura por  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\epsilon$ .
- b) Calcule a área do pentágono côncavo ACDEB, destacado na figura em cinza.

### Resolução

a)



- I) O  $\triangle ACD$  é isósceles, pois  $AC = AD$ .  
 $\hat{ACD} = \hat{ADC} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = \hat{CAB} = 60^\circ$ ; pois  $\alpha$  é externo ao  $\triangle ACD$ .
- II) Sendo  $\overline{CD}$  e  $\overline{BE}$  segmentos paralelos,  
 $\beta = \hat{DBE} = 30^\circ$ , pois são alternos internos.
- III)  $\overline{BD}$  é diâmetro da circunferência e,  
portanto, o  $\triangle BDE$  é retângulo.  
Logo,  $\epsilon = \hat{BED} = 90^\circ$ .

b) A circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$  possui centro  $A(2; 3)$  e raio  $R = 5$ .

No  $\triangle BDE$ , retângulo em  $E$ , temos:

$$\begin{cases} \text{sen } 30^\circ = \frac{DE}{10} \Rightarrow DE = 5 \\ \text{cos } 30^\circ = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Seja  $S_1$  e  $S_2$  as áreas dos triângulos  $BDE$  e  $ACD$ , respectivamente

$$\text{I) } S_1 = \frac{BE \cdot DE}{2} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } S_2 &= \frac{AC \cdot AD \cdot \text{sen } 120^\circ}{2} = \\ &= \frac{5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Logo, a área  $S$  do pentágono côncavo  $ACDEB$  é igual a:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

Respostas: a)  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ,  $\epsilon = 90^\circ$

$$\text{b) } \frac{75 \cdot \sqrt{3}}{4}$$