



1

O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e dutovias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados da tabela, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhões de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferrovário	18 %	24%	6,8	8,8
Rodoviário	77 %		29,1	
Dutoviário				

- a) Determine a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.
- b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

**Resolução**

- a) Se  $x$  for a carga total (em milhões de toneladas) transportada no primeiro semestre de 2007 e  $d$  o número de milhões de toneladas transportadas por dutos, então:

$$1) 77\% x = 29,1 \Leftrightarrow x \cong 37,8$$

$$2) 6,8 + 29,1 + d = 37,8 \Leftrightarrow d = 1,9$$

- b) Se  $y$  for a carga total (em milhões de toneladas) transportada no primeiro semestre de 2008 então  $24\% \cdot y = 8,8 \Leftrightarrow y = 36,7$

A carga total transportada por rodovias, nesse período, foi (em milhões de toneladas) igual a  $29,1 - 2,7 = 26,4$

Se  $p$  for a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008, então

$$p \cdot 36,7 = 26,4 \Leftrightarrow p \cong 0,72 = 72\%$$

Respostas: a) 37,8 milhões de toneladas

1,9 milhão de toneladas

b) 72%

Uma lâmpada incandescente de 100 W custa R\$ 2,00. Já uma lâmpada fluorescente de 24 W, que é capaz de iluminar tão bem quanto a lâmpada incandescente de 100 W, custa R\$ 13,40. Responda às questões abaixo, lembrando que, em uma hora, uma lâmpada de 100 W consome uma quantidade de energia equivalente a 100 Wh, ou 0,1 kWh. Em seus cálculos, considere que 1 kWh de energia custa R\$ 0,50.

- a) Levando em conta apenas o consumo de energia, ou seja, desprezando o custo de aquisição da lâmpada, determine quanto custa manter uma lâmpada incandescente de 100 W acesa por 750 horas. Faça o mesmo cálculo para uma lâmpada fluorescente de 24 W.
- b) Para iluminar toda a sua casa, João comprou e instalou apenas lâmpadas fluorescentes de 24 W. Fernando, por sua vez, comprou e instalou somente lâmpadas incandescentes de 100 W para iluminar sua casa.

Considerando o custo de compra de cada lâmpada e seu consumo de energia, determine em quantos dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João. Suponha que cada lâmpada fica acesa 3 horas por dia. Suponha, também, que as casas possuem o mesmo número de lâmpadas.

### Resolução

- a) O custo para manter acesa a lâmpada incandescente de 100W por 750 horas é

$$\frac{100 \cdot 750}{1000} \cdot \text{R\$ } 0,50 = \text{R\$ } 37,50$$

O custo para manter acesa a lâmpada fluorescente de 24W por 750 horas é

$$\frac{24 \cdot 750}{1000} \cdot \text{R\$ } 0,50 = \text{R\$ } 9,00$$

- b) Em x dias, por lâmpada acesa 3 horas por dia, em reais, João gastará

$$13,40 + \frac{24 \cdot 3}{1000} \cdot 0,50 \cdot x = 13,40 + 0,036x$$

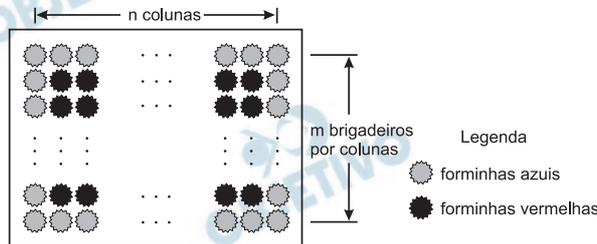
e Fernando gastará

$$2,00 + \frac{100 \cdot 3}{1000} \cdot 0,50 \cdot x = 2,00 + 0,15x$$

Logo, Fernando gastará mais com iluminação que João se  $2,00 + 0,15x > 13,40 + 0,036x \Leftrightarrow x > 100$ , ou seja, um período maior do que 100 dias.

- Respostas: a) R\$ 37,50; R\$ 9,00  
b) mais de 100 dias

Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando  $n$  colunas, cada qual com  $m$  brigadeiros, como mostra a figura abaixo. Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas.



- a) Sabendo que  $m = 3n/4$  e que a pessoa gastou o mesmo número de forminhas vermelhas e azuis, determine o número de brigadeiros da bandeja.
- b) Se a pessoa compra a massa do brigadeiro já pronta, em latas de 1 litro, e se cada brigadeiro, antes de receber o chocolate granulado que o cobre, tem o formato de uma esfera de 2 cm de diâmetro, quantas latas ela tem que comprar para produzir 400 brigadeiros? (Dica: lembre-se de que 1 litro corresponde a  $1000 \text{ cm}^3$ .)

#### Resolução

- a) Existem  $2n + 2 \cdot (m - 2)$  forminhas azuis e  $(n - 2) \cdot (m - 2)$  forminhas vermelhas.

Se o número de forminhas vermelhas e azuis são iguais, então:

$$(n - 2) \cdot (m - 2) = 2n + 2 \cdot (m - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \cdot n - 4m - 4n + 8 = 0$$

Assim:

$$\begin{cases} m \cdot n - 4m - 4n + 8 = 0 \\ m = \frac{3n}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n^2 - 28n + 32 = 0 \\ m = \frac{3n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 8, \text{ pois } n \in \mathbb{N}^* \\ m = \frac{3n}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 8 \end{cases}$$

Na bandeja, existem  $m \cdot n = 6 \cdot 8 = 48$  brigadeiros.

- b) Cada brigadeiro tem volume de  $\frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^3 \text{ cm}^3$ ,

ou seja, aproximadamente,  $4,19 \text{ cm}^3$ .

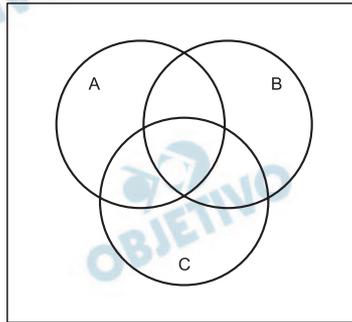
Quatrocentos brigadeiros terão volume de, aproximadamente,  $400 \cdot 4,19 \text{ cm}^3 = 1676 \text{ cm}^3$ .

Para produzi-los, a pessoa deverá comprar duas latas de massa.

Respostas: a) 48 brigadeiros    b) duas latas

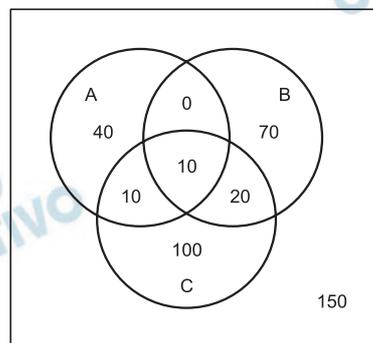
Três candidatos A, B e C concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B, e 100 votariam apenas no candidato C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

- Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?
- Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição mas ainda não tenha se decidido por um único candidato? (Sugestão: utilize o diagrama de Venn fornecido abaixo)



### Resolução

Utilizando o diagrama de Venn, tem-se a seguinte distribuição da quantidade de sócios entrevistados:



- O número de sócios entrevistados que estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A (conjunto  $(B \cap C) - A$ ) é 20. O número de sócios consultados que pretendem participar da eleição, mas não votariam em B (conjunto  $(A \cup B \cup C) - B$ ) é 150.
- O número de sócios que participaram da pesquisa é 400. Escolhendo um sócio ao acaso, a probabili-

dade de que ele participará da eleição é  $\frac{250}{400}$ . A pro-

babilidade de que ele participará da eleição e ainda

não se decidiu por um único candidato é  $\frac{40}{250}$ .

Portanto, a probabilidade de que ele participará da eleição e ainda não se decidiu por um único candidato é:

$$\frac{250}{400} \cdot \frac{40}{250} = \frac{40}{400} = 10\%$$

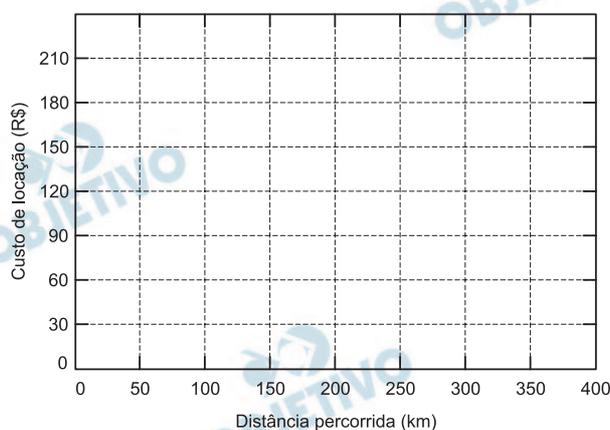
Obs.: Interpretando-se “escolhendo um sócio ao acaso, a probabilidade de que ele participará da eleição e ainda não se decidiu por um único candidato” como “escolhendo um sócio ao acaso e sabendo-se que ele participará da eleição, a probabilidade de que ele ainda não tenha se decidido por um único candidato”, a resposta seria  $\frac{40}{250} = 16\%$

Respostas: a) 20 e 150

b) 400 e 10%

Dois locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R\$ 30,00, além de R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R\$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R\$ 0,60.

- a) Para cada locadora, represente no gráfico abaixo a função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.
- b) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato. Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.



### Resolução

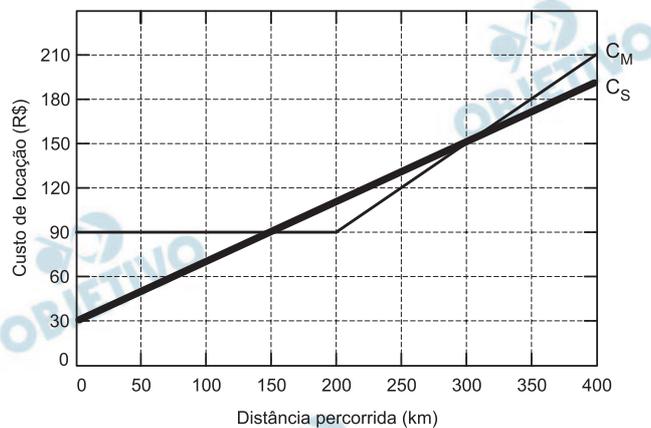
- a) Os custos diários de locação de um automóvel, por  $x$  km rodados, em cada locadora são, em reais, dados por:

$$C_S(x) = 30,00 + 0,40 \cdot x \text{ e}$$

$$C_M(x) = \begin{cases} 90,00, & \text{se } 0 \leq x \leq 200 \\ 90,00 + 0,60 \cdot (x - 200), & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

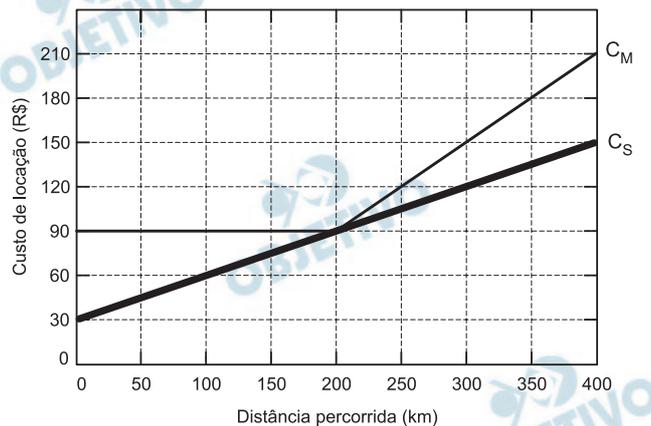
em que  $C_S$  é o custo na locadora Saturno e  $C_M$  é o custo na locadora Mercúrio.

Como  $90,00 + 0,60 \cdot (x - 200) = 0,60x - 30,00$  os gráficos que descrevem o custo diário de locação em função da distância são:



b) Como determinado pelo gráfico, a locação feita na Saturno é mais vantajosa para quem roda menos do que 150 km diários ou mais do que 300 km diários. A locadora Mercúrio é mais barata para quem roda mais de 150 km e menos do que 300 km diários.

A locadora Saturno tem o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias se os gráficos que descrevem o custo diário de cada locadora forem os seguintes (exceto para 200 km diários em que os custos são iguais):



Desta forma, o custo, em reais, por km rodado, não poderá ultrapassar  $\frac{90,00 - 30,00}{200 - 0} = 0,30$  (coeficiente angular da nova reta C<sub>S</sub>).

Respostas: a) gráficos

b1) A locadora Saturno tem plano mais barato para quem roda menos que 150 km ou mais de 300 km diários.

b2) O novo custo por quilômetro rodado da locadora Saturno deverá ser de 0,30 real.

Um casal convidou seis amigos para assistirem a uma peça teatral. Chegando ao teatro, descobriram que, em cada fila da sala, as poltronas eram numeradas em ordem crescente. Assim, por exemplo, a poltrona 1 de uma fila era sucedida pela poltrona 2 da mesma fila, que, por sua vez, era sucedida pela poltrona 3, e assim por diante.

- a) Suponha que as oito pessoas receberam ingressos com numeração consecutiva de uma mesma fila e que os ingressos foram distribuídos entre elas de forma aleatória. Qual a probabilidade de o casal ter recebido ingressos de poltronas vizinhas?
- b) Suponha que a primeira fila do teatro tenha 8 cadeiras, a segunda fila tenha 2 cadeiras a mais que a primeira, a terceira fila tenha 2 cadeiras a mais que a segunda e assim sucessivamente até a última fila. Determine o número de cadeiras da sala em função de  $n$ , o número de filas que a sala contém. Em seguida, considerando que a sala tem 144 cadeiras, calcule o valor de  $n$ .

### Resolução

- a) As oito pessoas poderão sentar-se de  $P_8$  formas diferentes nestes oito lugares.

Dessas  $P_8$  formas, o casal ficará em poltronas vizinhas de  $2 \cdot P_7$  formas diferentes.

A probabilidade para que isso ocorra é:

$$\frac{2 \cdot P_7}{P_8} = \frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- b) O número de cadeiras em cada fila do teatro são os termos da progressão aritmética  $(8; 10; 12; \dots; a_n)$  em que  $a_n = 8 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 6$ , sendo  $n$  o número de filas da sala.

O número de cadeiras da sala é dado por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(8 + 2n + 6) \cdot n}{2} = n^2 + 7n$$

Para que a sala contenha 144 cadeiras, devemos ter  $n^2 + 7n = 144 \Rightarrow n^2 + 7n - 144 = 0 \Rightarrow n = 9$ , pois  $n \in \mathbb{N}^*$

Respostas: a)  $\frac{1}{4}$

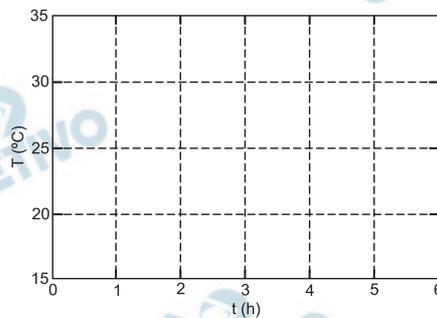
- b)  $n^2 + 7n$  cadeiras na sala.

Para que a sala tenha 144 cadeiras, devemos ter  $n = 9$ .

O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de  $t$ , o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é  $T(t) = (T_0 - T_{\text{ext}}) \cdot 10^{-t/4} + T_{\text{ext}}$ , onde  $T_0$  é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e  $T_{\text{ext}}$  é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem).

Sabendo que  $T_0 = 21^\circ\text{C}$  e  $T_{\text{ext}} = 30^\circ\text{C}$ , responda às questões abaixo.

- a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado. Em seguida, esboce abaixo o gráfico de  $T(t)$ .
- b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar condicionado, para que a temperatura subisse  $4^\circ\text{C}$ . Se necessário, use  $\log_{10} 2 \approx 0,30$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0,48$  e  $\log_{10} 5 \approx 0,70$ .



### Resolução

- a) De acordo com o enunciado, temos, para a temperatura  $T$  em  $^\circ\text{C}$ :

$$T(t) = (T_0 - T_{\text{ext}}) \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + T_{\text{ext}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(t) = (21 - 30) \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30 \Leftrightarrow$$

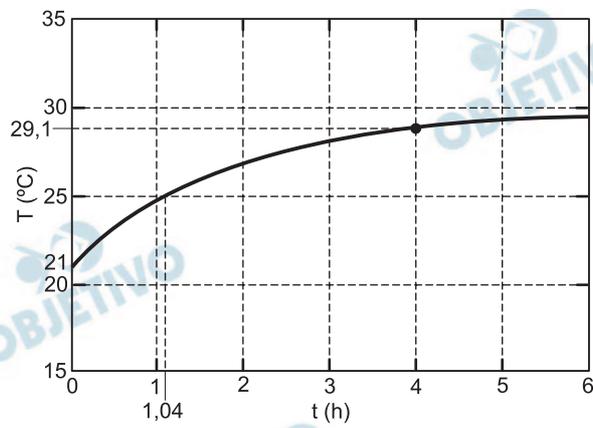
$$\Leftrightarrow T(t) = 30 - 9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}}$$

Assim, para  $t = 4$ , tem-se:

$$\Leftrightarrow T(4) = 30 - 9 \cdot 10^{-\frac{4}{4}} \Leftrightarrow T(4) = 30 - 9 \cdot 10^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(4) = 30 - 0,9 \Leftrightarrow T(4) = 29,1$$

O gráfico de  $T$  em função de  $t$  é o seguinte:



b) Para que a temperatura interna do ônibus subisse 4°C, deveríamos ter  $T(t) = 25$

$$\text{Assim: } 30 - 9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} = 25 \Leftrightarrow 10^{-\frac{t}{4}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{\frac{t}{4}} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \log 9 - \log 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 4 (\log 3 + \log 3 - \log 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \approx 4 (0,48 + 0,48 - 0,70) \Leftrightarrow t \approx 1,04$$

Respostas: a) 29,1°C e gráfico

b) aproximadamente 1,04 hora

Pedro precisa comprar  $x$  borrachas,  $y$  lápis e  $z$  canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R\$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 2,00 pelo lápis e R\$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 1,00 pelo lápis e R\$ 4,00 pela caneta.

- a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.
- b) Levando em conta que  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$  e  $z \geq 1$ , e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

### Resolução

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 23 \\ x + y + 4z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 23 - 3z \\ x + y = 25 - 4z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 - 5z \\ y = -2 + z \end{cases}$$

- b) De acordo com item (a) e levando em conta que  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ ,  $z \geq 1$ , e que todos são inteiros, temos:

$$\begin{cases} 27 - 5z \geq 1 \\ -2 + z \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq \frac{26}{5} \\ z \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z = 4 \text{ ou } z = 5$$

Assim sendo:

$$z = 3 \Rightarrow x = 12, y = 1$$

$$z = 4 \Rightarrow x = 7, y = 2$$

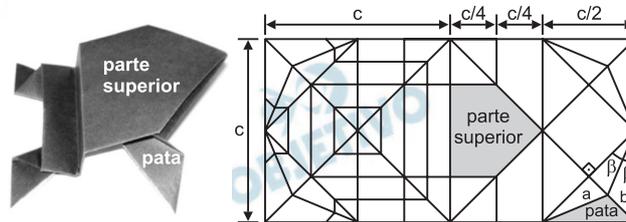
$$z = 5 \Rightarrow x = 2, y = 3$$

Respostas: a)  $x = 27 - 5z$ ;  $y = -2 + z$

b)

x	y	z
12	1	3
7	2	4
2	3	5

A figura abaixo, à esquerda, mostra um sapo de *origami*, a arte japonesa das dobraduras de papel. A figura à direita mostra o diagrama usado para a confecção do sapo, na qual se utiliza um retângulo de papel com arestas iguais a  $c$  e  $2c$ . As linhas representam as dobras que devem ser feitas. As partes destacadas correspondem à parte superior e à pata direita do sapo, e são objeto das perguntas a seguir.



- a) Quais devem ser as dimensões, em centímetros, do retângulo de papel usado para confeccionar um sapo cuja parte superior tem área igual a  $12\text{cm}^2$ ?
- b) Qual a razão entre os comprimentos das arestas  $a$  e  $b$  da pata direita do sapo?

### Resolução

- a) A parte superior do sapo é composta por um retângulo de dimensões  $\frac{c}{2}$  e  $\frac{c}{4}$ , e por um triângulo isósceles de base  $\frac{c}{2}$  e altura  $\frac{c}{4}$ .

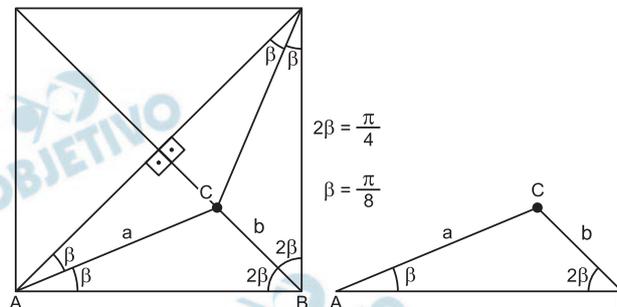
Assim, para que sua área seja igual a  $12\text{ cm}^2$ , deve-se ter:

$$\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4} = 12\text{ cm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 = 192\text{ cm}^2 \Leftrightarrow c^2 = 64\text{ cm}^2 \Leftrightarrow c = 8\text{ cm}$$

Logo, as dimensões do retângulo de papel usado para confeccionar esse sapo são  $c = 8\text{ cm}$  e  $2c = 16\text{ cm}$ .

b)



$$1^\circ) \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2\beta - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\beta - 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

$$\text{pois } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

2º) No triângulo ABC, de acordo com a lei dos senos, tem-se:

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} \Leftrightarrow$$

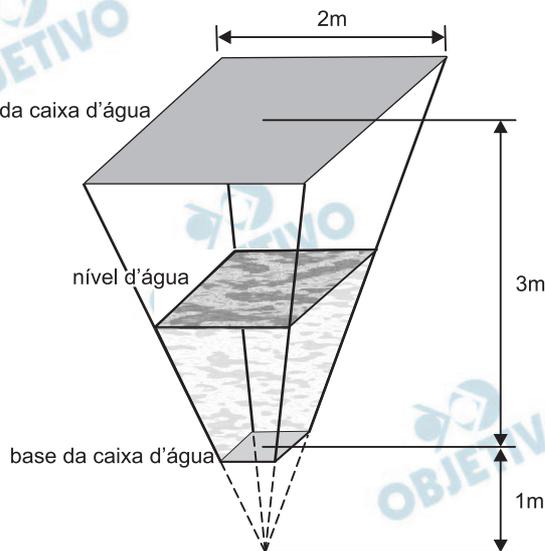
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos \beta, \text{ pois } \sin \beta \neq 0$$

Assim:

$$\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Respostas: a) 8 cm e 16 cm      b)  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Uma caixa d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura abaixo, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.



- a) Qual o volume **total** da caixa d'água?  
 b) Se a caixa contém  $(13/6) \text{ m}^3$  de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

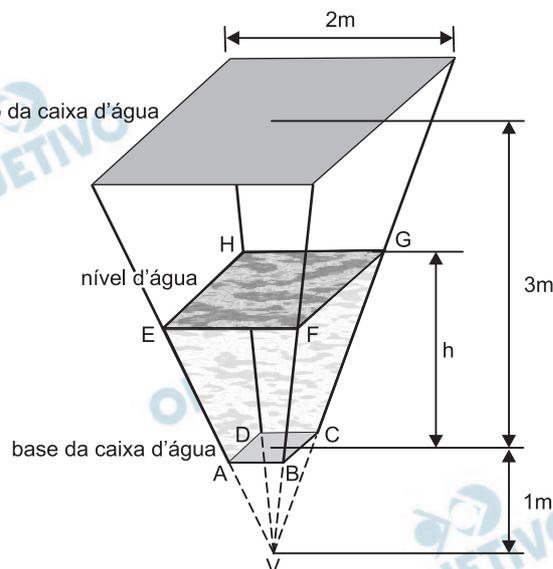
**Resolução**

a) Sendo  $a_b$  a aresta da base e  $V$  o volume total da caixa d'água, temos:

$$1) \frac{a_b}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_b = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$2) V = \frac{3}{3} \cdot \left( 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = 4 + \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow V = \frac{21}{4} \text{ m}^3$$

b)



Sendo  $V_1$  o volume da pirâmide VABCD,  $V_2$  o volume da pirâmide VEFGH e  $h$  altura do nível de água em relação à base, temos:

$$1) V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{12} \text{m}^3$$

$$2) V_2 = \frac{1}{12} + \frac{13}{6} = \frac{1+26}{12} \Rightarrow V_2 = \frac{27}{12} \text{m}^3$$

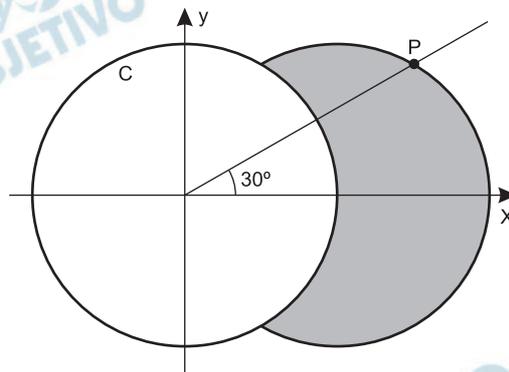
$$3) \left(\frac{1}{1+h}\right)^3 = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{1+h}\right)^3 = \frac{1/12}{27/12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+h} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 2\text{m}$$

Respostas: a)  $\frac{21}{4} \text{m}^3$

b) 2m

A circunferência de centro em  $(2, 0)$  e tangente ao eixo  $y$  é interceptada pela circunferência  $C$ , definida pela equação  $x^2 + y^2 = 4$ , e pela semi-reta que parte da origem e faz ângulo de  $30^\circ$  com o eixo- $x$ , conforme a figura a seguir.



- Determine as coordenadas do ponto  $P$ .
- Calcule a área da região sombreada.

### Resolução

a) 1º) A circunferência de centro  $(2;0)$  e tangente ao eixo  $y$  (raio 2) tem equação  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .

2º) A reta que passa pela origem, com inclinação de  $30^\circ$  (coeficiente angular  $m = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ),

tem equação  $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$

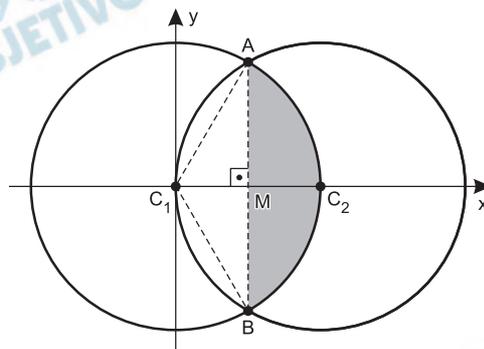
3º) O ponto  $P$ , intersecção da circunferência com a reta, é obtido a partir do sistema:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Como  $P$  pertence ao 1º quadrante, suas coordenadas são  $x = 3$  e  $y = \sqrt{3}$ , ou seja,  $P(3; \sqrt{3})$ .

b) As duas circunferências têm raios iguais a 2 e centros  $C_1(0;0)$  e  $C_2(2;0)$ .

A partir da figura, conclui-se que:



1º)  $C_1C_2 = 2 \Rightarrow C_1M = C_2M = 1$  ( $M$  é ponto médio de  $C_1C_2$ ).

2º)  $AC_1 = BC_1 = 2$  (raio)

3º)  $\Delta AMC_1$  e  $\Delta BMC_2$  são retângulos, do que se conclui que  $AM = BM = \sqrt{3}$  e os ângulos  $MC_1A = MC_1B = 60^\circ$ .

4º) A área do segmento circular  $AC_2B$  é igual à área do setor circular (de ângulo central igual a  $120^\circ$ ), menos a área do triângulo  $ABC_1$ , isto é:

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{4 \cdot \pi}{3} - \sqrt{3}$$

5º) A área da região sombreada, pedida na questão, será igual à área do círculo de raio 2, menos 2 vezes a área do segmento circular obtido anteriormente. Portanto, a área pedida é:

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 2^2 - 2 \cdot A_1 = 4 \cdot \pi - 2 \cdot \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respostas: a)  $P(3;\sqrt{3})$

b)  $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

Seja  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio de grau  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  e  $a_j \in \mathbb{R}$  para qualquer  $j$  entre  $0$  e  $n$ . Seja  $g(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$  o polinômio de grau  $n-1$  em que os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são os mesmos empregados na definição de  $f(x)$ .

a) Supondo que  $n = 2$ , mostre que

$$g\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ para todo } x, h \in \mathbb{R},$$

$h \neq 0$ .

b) Supondo que  $n = 3$  e que  $a_3 = 1$ , determine a expressão do polinômio  $f(x)$ , sabendo que  $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$ .

### Resolução

a) Para  $n = 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $h \in \mathbb{R}^*$ , tem-se:

$$1^\circ) f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \text{ e } g(x) = 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

$$2^\circ) g\left(x + \frac{h}{2}\right) = 2 \cdot a_2 \cdot \left(x + \frac{h}{2}\right) + a_1 =$$

$$= 2 \cdot a_2 \cdot x + a_2 \cdot h + a_1$$

$$3^\circ) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{a_2 \cdot (x+h)^2 + a_1 \cdot (x+h) + a_0 - (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)}{h} =$$

$$= \frac{a_2 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot x + a_1 \cdot h + a_0 - a_2 \cdot x^2 - a_1 \cdot x - a_0}{h} =$$

$$= \frac{2 \cdot a_2 \cdot x \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h}{h} =$$

$$= 2 \cdot a_2 \cdot x + a_2 \cdot h + a_1 = g\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

b) Para  $n = 3$  e  $a_3 = 1$ , tem-se

$$f(x) = x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \text{ e } g(x) = 3x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

Sabendo-se que  $f(1) = g(1) = f(-1) = 0$ , tem-se:

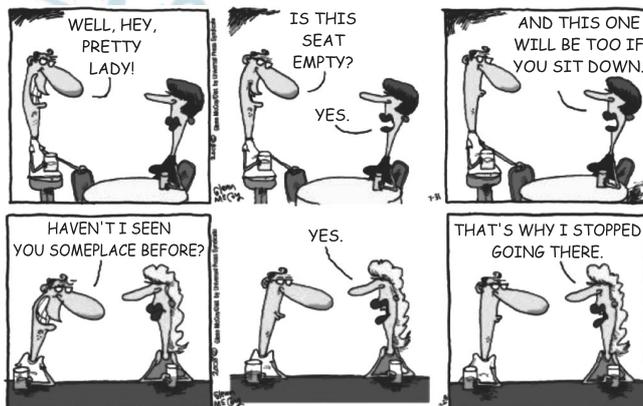
$$\begin{cases} 1 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ -1 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Assim, } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Respostas: a) demonstração

$$b) f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

As tirinhas abaixo são de autoria do cartunista norte-americano Glenn McCoy.



[www.gocomics.com/duplex/2008/07/31](http://www.gocomics.com/duplex/2008/07/31)

- Para abordar as mulheres que aparecem nas tirinhas, o personagem faz uso de duas perguntas comumente utilizadas em situação semelhante. Que perguntas são essas?
- O que cada uma das mulheres diz para indicar que não está disposta a interagir com ele?

### Resolução

- Na primeira tirinha a pergunta é:

“Este lugar está vazio?”

Na segunda tirinha a pergunta é:

“Já não a vi em algum lugar anteriormente?”

- A primeira mulher responde que o lugar dela também ficará vago se ele se sentar ali.

A segunda mulher responde que esta é a razão pela qual ela deixou de ir lá.

O texto abaixo foi extraído de um pôster bem-humorado, afixado na porta do quarto de um adolescente.

<b>ROOM RULES</b>	
Authorized personnel only beyond this point	
<b>DO NOT PANIC</b> Excessive sound levels or odors emanating from this room are not life threatening	<b>DO NOT TOUCH ANYTHING</b> Messiness is a sign of genius. Tidying up could impact negatively on my mental development.
<b>HOURS OF OPERATION</b> Never before noon.	

- a) Segundo o texto, o que não representa uma ameaça à vida?
- b) Que efeito a arrumação do quarto provocaria no adolescente?

**Resolução**

- a) **Os níveis excessivos de som e os odores que emanam do quarto do adolescente não representam uma ameaça à vida.**
- b) **A arrumação do quarto causaria um impacto negativo no desenvolvimento mental do adolescente.**

<b>ADVERTISING NOWADAYS</b>
<p>People are starting to blame invasive advertising for the stress in their lives. A few generations ago, people encountered only a few dozen ads in a typical day. Today, 3,000 marketing messages a day flow into the average North American brain. That's more than many of us can handle on top of all the other pressures of modern life. The fun image that advertising has traditionally enjoyed is now giving way to a much darker picture of advertising as mental pollution.</p> <p>(Adaptado de <i>Adbusters Magazine</i>, 30/07/2007, nº 73, p. 5)</p>

- a) Segundo o texto, a percepção que as pessoas têm da propaganda está mudando. Como a propaganda era vista antes e como ela está começando a ser vista hoje?
- b) A que se refere o número 3.000 mencionado no texto?

**Resolução**

- a) **A propaganda era vista como algo divertido e está começando a ser vista, atualmente, como poluição mental.**
- b) **O número 3.000 refere-se às mensagens publicitárias que entram no cérebro de um americano comum, diariamente.**

MYTHS AND FACTS ABOUT DRINKING	
<b>MYTH</b> Everyone reacts to alcohol in the same way.	<b>FACT</b> There are dozens of factors that affect a person's reaction to alcohol: body weight, metabolism, gender, etc.
<b>MYTH</b> Cold showers, fresh air or hot coffee help sober a person.	<b>FACT</b> Only time will remove alcohol from the system. As an old saying goes, "give a drunk a cup of coffee and all you will have is a wide-awake drunk".
<b>MYTH</b> Eating a big meal before you drink will keep you sober.	<b>FACT</b> Food in the stomach merely delays the absorption of alcohol into the bloodstream. A full stomach is not a defense against getting drunk.

Adaptado de  
[www.alcoholism.about.com/od/about/a/aa040615.htm](http://www.alcoholism.about.com/od/about/a/aa040615.htm).  
Acessado em 25/07/2008.

- Qual é o efeito do café em uma pessoa alcoolizada?
- O que acontece quando uma pessoa come antes de ingerir bebidas alcoólicas?

#### Resolução

- De acordo com o texto, uma xícara de café apenas manterá o bêbado totalmente desperto.
- Quando uma pessoa come antes de ingerir bebidas alcoólicas, a absorção do álcool na corrente sanguínea será retardada.

**Mobile phone users slow traffic down**

By Brian Osborne

Sick of traffic congestion? Well, part of the blame needs to go to motorists who talk on mobile phones. At least, that is the conclusion of a study conducted by the University of Utah. The study found that if you use your mobile phone while driving, you are less likely to pass slower vehicles. If you think the study is not talking about you, because you have a hands-free device, then you are wrong. According to previous studies performed by psychology Professor Dave Strayer of the University of Utah, the ultimate distraction for drivers is the conversation – not just holding the mobile phone.

Adaptado de  
[www.geek.com/mobile-phone-users-slow-traffic-down/](http://www.geek.com/mobile-phone-users-slow-traffic-down/)  
Acessado em 05/08/2008.

- a) Por que motoristas que dirigem enquanto conversam ao celular retardam o fluxo do tráfego?
- b) A que conclusão chegou o Professor Dave Strayer em suas pesquisas?

**Resolução**

- a) **Os motoristas que dirigem enquanto conversam ao celular retardam o fluxo do tráfego, pois é menos provável que eles ultrapassem os veículos mais lentos.**
- b) **O Professor Dave Strayer concluiu que o principal motivo de distração para os motoristas é a conversa e não simplesmente segurar o celular.**

**AT THE MARKET'S MARK**

By Sonia Racy

The number of Brazilians living alone grows. IBGE – Brazilian Institute of Geography and Statistics – discovered, in its last survey, that 5 million Brazilians live alone. Of this total, 63% are senior citizens, but 22% are people in the 20 to 29 years old age range. It is a market that grows 6 to 7% a year and draws attention from different segments of the economy. After all, most of these consumers earn from 10 to 20 minimum wages and have college degrees.

Adaptado de *TAM Magazine*, ano 4,  
n° 44, outubro de 2007, p. 72.

- a) A que se refere o índice de 63% mencionado no texto?
- b) O que caracteriza a maior parte dos consumidores brasileiros retratados no texto?

**Resolução**

- a) O índice de 63% mencionado no texto refere-se à porcentagem de idosos que vivem sozinhos no Brasil.
- b) A maior parte desses consumidores recebe entre 10 e 20 salários mínimos e tem grau universitário.

**AUTISM AND ITS CAUSE**

Some parents of children with autism believe that there is a link between measles, mumps, rubella (MMR) vaccine and this disorder. But there is no sensible reason to believe that any vaccine can cause autism. Typically, symptoms of this disorder are first noted by parents as their child begins to have difficulty with delays in speaking after age one. MMR vaccine is first given to children at 12-15 months of age. Since this is also an age when autism commonly becomes apparent, it is not surprising that autism follows MMR immunization in some cases. However, by far the most logical explanation is coincidence, not cause-and-effect.

Adaptado de  
[www.quackwatch.com/03HealthPromotion/immu/autism.html](http://www.quackwatch.com/03HealthPromotion/immu/autism.html)  
Acessado em 22/03/2008.

- a) Qual seria, para alguns pais, a causa do autismo de seus filhos?
- b) Por que esses pais teriam tal crença?

**Resolução**

- a) **Alguns pais de crianças autistas acreditam que a causa desse distúrbio seja a vacina contra sarampo, caxumba e rubéola (MMR).**
- b) **Essa crença tem origem pelo fato de a vacina MMR ser aplicada pela primeira vez entre os 12 e 15 meses de idade, período em que o autismo geralmente torna-se aparente.**

### WHY AM I UNEMPLOYED?

Persons who become unemployed often feel at fault; often feel that *they* have failed in some way. This is a common sense view, but there are many complicated reasons why somebody might be made redundant. The reasons for unemployment could be, for instance, technological changes: the introduction of new machines in the work market does take jobs away from people. Changes in government policies or lack of new requisite skills due to no access to education or retraining are also often responsible for unemployment. None of these has anything to do with individual worker. The fact is that one out of ten thousand might be made redundant because of laziness, but the rest are surplus because society has changed.

Adaptado de R. Osborne e B. Van Loon, *Introducing Sociology*. Londres: Icon Books, 2004, p. 9-10.

- a) Qual é o argumento central desse texto?
- b) Indique **dois** fatores que, segundo o texto, podem, de fato, responder à pergunta “Why am I unemployed?”.

#### **Resolução**

a) **As razões pelas quais um indivíduo pode ficar desempregado são o argumento central do texto.**

b) **Sugestões:**

- **mudanças tecnológicas, com a introdução de novas máquinas no mercado de trabalho;**
- **mudanças nas políticas governamentais;**
- **falta de novas capacitações exigidas pelo mercado de trabalho, como resultante do não acesso à educação ou reciclagem.**

### The Bermuda Triangle

The Bermuda Triangle is an area in the Atlantic Ocean bounded roughly at its points by Miami, Bermuda, and Puerto Rico. Legend has it that many ships and planes have mysteriously vanished in this area. But there are some skeptics who argue that the facts do not support the legend. The number of wrecks in this area is not extraordinary, given its size, location and the amount of traffic it receives. Many of the ships and planes that have been identified as having disappeared mysteriously in the Bermuda Triangle were not even in that area. The real mystery, they argue, is how the Bermuda Triangle became a mystery at all.

Adaptado de [www.skeptic.com/bermuda.html](http://www.skeptic.com/bermuda.html)

Acessado em 14/09/2008.

- a) Indique **um** dos fatos invocados por alguns céticos para negar que haja algo de misterioso nos acontecimentos associados ao Triângulo das Bermudas.
- b) Segundo esses céticos, qual é o verdadeiro enigma envolvendo o Triângulo das Bermudas?

#### Resolução

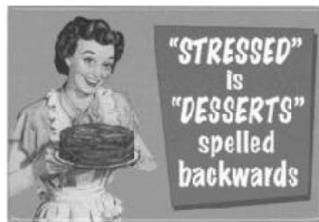
##### a) Sugestões:

- o número de naufrágios nessa área não é extraordinário devido à dimensão geográfica, localização e quantidade de tráfego que o Triângulo das Bermudas recebe;
  - muitos dos navios e aviões que tinham sido identificados como tendo desaparecido misteriosamente no Triângulo das Bermudas nem mesmo estavam naquela área.
- b) O verdadeiro enigma é descobrir como o Triângulo das Bermudas tornou-se um mistério.

As imagens abaixo foram encontradas em ímãs para geladeiras vendidos nos Estados Unidos.



(1)



(2)

- O que a mulher do primeiro ímã não consegue entender?
- O texto do segundo ímã faz referência a uma tarefa doméstica. Que tarefa é essa e o que, na língua inglesa, possibilita que ela seja associada ao estresse?

#### **Resolução**

- A mulher do primeiro ímã não consegue entender como o conceito de cozinhar e limpar aplica-se a ela.
- A tarefa mencionada no texto é cozinhar. A palavra DESSERTS (= sobremesas) quando lida de trás para frente fica STRESSED (= estressada).

Em 1931, William Faulkner escreveu *The Sound and the Fury*, um clássico da literatura norte-americana. O excerto abaixo é parte da introdução, escrita por Richard Hughes, à edição do romance publicada pela Penguin Books, em 1971.

THERE is a story told of a celebrated Russian dancer, who was asked by someone what she meant by a certain dance. She answered with some exasperation, "If I could say it in so many words, do you think I should take the very great trouble of dancing it?"

It is an important story, because it is the valid explanation of obscurity in art. A method involving apparent obscurity is surely justified when it is the clearest, the simplest method of saying in full what the writer has to say.

This is the case of *The Sound and the Fury*. I shall not attempt to give it a summary or an explanation of it: for if I could say in three pages what takes Mr. Faulkner three hundred there would obviously be no need for the book. All I propose to do is to offer a few introductory comments to encourage the reader.

- a) Segundo Hughes, em que circunstâncias a suposta obscuridade de uma obra de arte se justifica?
- b) Que razão apresenta Hughes para não resumir nem explicar *The Sound and The Fury*?

#### **Resolução**

- a) **Um método que envolva a suposta obscuridade de uma obra de arte é certamente justificado quando for o modo mais claro e mais simples de expressar tudo o que o escritor tem para dizer.**
- b) **Hughes afirma que se ele pudesse dizer em três páginas o que Faulkner disse em trezentas, obviamente não haveria necessidade de se escrever o livro.**

## Environment: the case of DDT and the Peregrine

The most reliable evidence of the damaging effect of organochlorine pesticides, such as DDT, on wildlife was demonstrated in 1967 by Dr. D. A. Ratcliffe of the Nature Conservancy in the United Kingdom. The peregrine falcon (*Falco peregrinus*) was protected in Britain after 1945 and showed a dramatic increase in numbers until, in the mid-1950s, the population went into a sharp decline. This proved to be due to reproductive failure: birds went laying eggs with abnormally thin shells and a large proportion of them were broken during incubation. High concentrations of DDT residues were found in peregrines and in the yolk of their eggs during the mid-1960s. There was no doubt that DDT was the cause of the population decline of these birds, and with the cessation of the use of DDT for agricultural purposes in Britain, peregrine numbers have increased to their former level.

Adaptado de R. B. Clark, *Marine Pollution*.  
Oxford: OUP, p. 142-143.

- a) Que problemas começaram a ocorrer no processo de reprodução dos falcões peregrinos, levando ao decréscimo de sua população?
- b) Que fatos levaram à conclusão, em meados da década de 60, de que o uso do pesticida DDT estava diretamente relacionado à diminuição do número de falcões peregrinos?

### Resolução

- a) As aves começaram a pôr ovos com cascas muito finas e uma grande quantidade deles se quebrou durante a incubação.
- b) Altas concentrações de resíduos de DDT encontrados nas aves e nas gemas de seus ovos em meados da década de 1960. Estas foram as causas da diminuição do número de falcões peregrinos, pois com a interrupção do uso do inseticida, na agricultura na Inglaterra, o número de falcões peregrinos voltou a aumentar.