NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$:	conjunto dos números naturais	$\mathbb{C}$:	conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}$:	conjunto dos números inteiros	i :	unidade imaginária, $i^2 = -1$
$\mathbb{R}$:	conjunto dos números reais	$\lvert z\rvert$:	módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:	conjunto das matrizes reais $m \times n$	$\operatorname{Re} z$:	parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\det(M)$:	determinante da matriz M	$[a, b]$:	$\{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$
M^t :	transposta da matriz M	$[a, b[$:	$\{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$
$A \setminus B$:	$\{x :\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$	$]a, b[$:	$\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$:	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k,\ k \in \mathbb{N}$	$\sum_{n=0}^{k} a_n$:	$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k,\ k \in \mathbb{N}$

$\operatorname{Arg} z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi[$

A^C : conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$;

III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas I e II.
D ( ) apenas I e III. E ( ) todas.

Questão 02. A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 03. Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

A ( ) $\sqrt{29}$. B ( ) $\sqrt{41}$. C ( ) $3\sqrt{5}$. D ( ) $4\sqrt{3}$ E ( ) $3\sqrt{6}$.

Questão 04. A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

A ( ) 8. B ( ) 12. C ( ) 16. D ( ) 18. E ( ) 20.

Questão 05. Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \ln(a^2+b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\dfrac{a}{b}$ é

A ( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B ( ) 1. C ( ) $\sqrt{2}$. D ( ) 2. E ( ) $3\sqrt{2}$.

Questão 06. Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por

$$f(x) = e^{x^2+ax+b} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que

A ( ) $g \circ f(1) = \ln 3$.
B ( ) $\nexists\, g \circ f(0)$.
C ( ) $g \circ f$ nunca se anula.
D ( ) $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
E ( ) $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Questão 07. Considere funções f, g, $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, $f+g$ é injetora;
II. Se f e g são sobrejetoras, $f+g$ é sobrejetora;
III. Se f e g não são injetoras, $f+g$ não é injetora;
IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f+g$ não é sobrejetora,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) nenhuma. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas III e IV. E ( ) todas.

Questão 08. Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 09. Considere a equação $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a -2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum_{n=0}^{5} a_n$ é igual a

A ( ) -21. B ( ) $-\dfrac{2}{3}$. C ( ) $\dfrac{21}{32}$. D ( ) $\dfrac{63}{32}$. E ( ) 63.

Questão 10. Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9} + \sqrt{2\lambda+17} = 12$. Então a soma das soluções z, com $\operatorname{Re} z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

A ( ) $\sqrt{2}$. B ( ) $2\sqrt{2}$. C ( ) $4\sqrt{2}$. D ( ) 4. E ( ) 16.

Questão 11. Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

A ( ) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

B ( ) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

C ( ) $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

D ( ) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

E ( ) $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Questão 12. Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

A ( ) dos três resultados, I é o mais provável.

B ( ) dos três resultados, II é o mais provável.

C ( ) dos três resultados, III é o mais provável.

D ( ) os resultados I e II são igualmente prováveis.

E ( ) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Questão 13. Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

A ( ) $\frac{1}{6}$.

B ( ) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C ( ) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

D ( ) 1.

E ( ) $\sqrt{216}$.

Questão 14. Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4 \operatorname{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I.

B ( ) apenas III.

C ( ) apenas I e III.

D ( ) apenas II e IV.

E ( ) todas.

Questão 15. Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\dfrac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec}(x - \pi) - \sec(\pi - x)}$ é

A ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B ( ) 1.

C ( ) $\sqrt{2}$.

D ( ) $\sqrt{3}$.

E ( ) 2.

Questão 16. Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

A ( ) $\frac{1}{2}A\hat{B}C$.
B ( ) $\frac{3}{2}\pi - 2\,A\hat{B}C$.
C ( ) $\frac{2}{3}\,A\hat{B}C$.
D ( ) $2\,A\hat{B}C - \pi$.
E ( ) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$.

Questão 17. Sobre a parábola definida pela equação $x^2+2xy+y^2-2x+4y+1=0$ pode-se afirmar que

A ( ) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.
B ( ) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.
C ( ) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.
D ( ) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.
E ( ) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Questão 18. Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;
II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;
III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) III.
B ( ) I e III.
C ( ) II e III.
D ( ) III e IV.
E ( ) I e II e IV.

Questão 19. Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

A ( ) 2.
B ( ) 4.
C ( ) $\sqrt{17}$.
D ( ) 6.
E ( ) $5\sqrt{10}$.

Questão 20. No sistema xOy os pontos $A=(2,0)$, $B=(2,5)$ e $C=(0,1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

A ( ) 1.
B ( ) $\frac{100}{105}$.
C ( ) $\frac{10}{11}$.
D ( ) $\frac{100}{115}$.
E ( ) $\frac{5}{6}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Para $z = 1+iy$, $y>0$, determine todos os pares (a,y), $a>1$, tais que $z^{10}=a$. Escreva a e y em função de $\operatorname{Arg} z$.

Questão 22. Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função

$$f : D \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \log_{x(\frac{\pi}{4}-x)}(4\ \mathrm{sen}\, x\ \cos x - 1).$$

Questão 23. Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x, $x^3 + mx^2 + (m+4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2,\, 2[$.

Questão 24. Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Questão 25. Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta. \end{cases}$$

(a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

(b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Questão 26. Considere o sistema nas variáveis reais x e y :

$$\begin{cases} x\ \mathrm{sen}\,\alpha + 3\,y\cos\alpha = a \\ x\cos\alpha + y\ \mathrm{sen}\,\alpha = b, \end{cases}$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Questão 27. Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta)\cos\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = \sqrt{3}\ .$$

Questão 28. Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)(y + \frac{x}{2} - 2) = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0.$$

Questão 29. Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

(a) A medida da mediana em função de l.

(b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Questão 30. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm^3. Calcule:

(a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

(b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.