NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{M}_{mxn}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais m x n
det(M): determinante da matriz M
M^t: transposta da matriz M
$A \setminus B$: $\{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária, $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re z: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$
$[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$
$]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n$: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $k \in \mathbb{N}$

Arg z: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Arg $z \in [0, 2\pi[$
A^C: conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 C

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$;

III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II.

c) apenas I e II. d) apenas I e III.

e) todas.

Resolução

I) ***Verdadeira*, pois para $x \in U$, temos:**

$x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ e $(x \notin B$ ou $x \notin C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \in A$ e $x \notin C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B)$ ou $x \in (A \setminus C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Portanto, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

II) ***Verdadeira*, pois para $x \in U$, temos:**

$x \in (A \cap C) \setminus B \Leftrightarrow x \in (A \cap C)$ e $x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap C)$ e $x \in B^C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cap B^C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B^C \cap C)$.

Portanto, $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$

III) ***Falsa*, pois para $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; e; f\}$ e $C = \{c; d; f; g\}$, temos:**

1) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \{a; c\} \cap \{b; e\} = \emptyset$

2) $(A \setminus B) \setminus C = \{a; c\} \setminus \{c; d; f; g\} = \{a\} \neq \emptyset$

Portanto, para os exemplos dados,

$(A \setminus B) \cap (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

2 C

A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5 .

Resolução

I) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow (z^4)^2 - 17z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^4 = 1$ ou $z^4 = 16$

II) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = i$ ou $z = -i$

III) $z^4 = 16 \Rightarrow z = 2$ ou $z = -2$ ou $z = 2i$ ou $z = -2i$

IV) O conjunto verdade de equação

$z^8 - 17z^4 + 16 = 0$ é $\{1; -1; i; -i; 2; -2; 2i; -2i\}$

V) As únicas raízes dessa equação que satisfazem a condição $z - |z| = 0$ são *1* e *2* e a soma dessas raízes é *3*.

 B

Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

a) $\sqrt{29}$. b) $\sqrt{41}$. c) $3\sqrt{5}$.

d) $4\sqrt{3}$. e) $3\sqrt{6}$.

Resolução

I) $(z - 5 + 3i)^4 = 1 \Leftrightarrow (z - 5 + 3i)^2 = \pm 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z - 5 + 3i = \pm 1$ **ou** $z - 5 + 3i = \pm i$

II) Desta forma, as soluções da equação dada são:

$$z_1 = 6 - 3i \text{ e } \operatorname{tg}[\operatorname{Arg}(z_1)] = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = 4 - 3i \text{ e } \operatorname{tg}[\operatorname{Arg}(z_2)] = -\frac{3}{4}$$

$$z_3 = 5 - 2i \text{ e } \operatorname{tg}[\operatorname{Arg}(z_3)] = -\frac{2}{5}$$

$$z_4 = 5 - 4i \text{ e } \operatorname{tg}[\operatorname{Arg}(z_4)] = -\frac{4}{5}$$

III) Como $-\frac{4}{5} < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < -\frac{2}{5}$, z_4 **é o de menor argumento e, portanto,** $z_4 = z_0$

$$|z_0| = |z_4| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

D

A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

a) 8. b) 12. c) 16. d) 18. e) 20.

Resolução

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19 \,.\left(4^{\sqrt{x+1}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^3 + 44 \,.\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19 \,.\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^2$$

Fazendo $2^{\sqrt{x+1}} = y > 0$, tem-se:

$y^3 - 19y^2 + 44 \,. y + 64 = 0$, em que *4* é raiz da equação, pois $4^3 - 19 \,. 4^2 + 44 \,. 4 + 64 = 0$. As outras duas raízes, α e β, são tais que:

$$\alpha + \beta + 4 = 19 \text{ e } \alpha \,. \beta \,. 4 = -64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 15 \text{ e } \alpha \,. \beta = -16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 16 \text{ e } \beta = -1) \text{ ou } (\alpha = -1 \text{ e } \beta = 16).$$

Os possíveis valores de y serão, portanto, 4, 16 e – 1.

Assim:

I) $y = 4 \Rightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = 2^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

II) $y = 16 \Rightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = 2^4 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = 16 \Rightarrow x = 15$

III) $y = -1 \Rightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

As raízes reais da equação dada são 3 e 15, cuja soma é 18.

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) 1. c) $\sqrt{2}$. d) 2. e) $3\sqrt{2}$.

Resolução

I) $\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2b = \frac{1}{16} \Leftrightarrow b = \frac{1}{16a^2}$

II) $\ell n\,(a^2 + b) + \ell n\,8 = \ell n\,5 \Leftrightarrow \ell n\,[(a^2 + b)\,.\,8] = \ell n\,5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^2 + b)\,8 = 5 \Leftrightarrow 8a^2 + 8b = 5$

III) Substituindo (I) em (II), temos:

$$8a^2 + 8\,.\,\frac{1}{16a^2} = 5 \Leftrightarrow 16a^4 - 10a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{10 \pm 6}{32} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } a^2 = \frac{1}{8}$$

IV) $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ a^2\,.\,b = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm 4\sqrt{2}$

V) $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{8} \\ a^2\,.\,b = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

VI) Um possível valor de $\frac{a}{b}$ **é** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por

$$f(x) = e^{x^2 + ax + b} \quad \text{e} \quad g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que

a) $g \circ f(1) = \ln 3$.

b) $\nexists\ g \circ f(0)$.

c) $g \circ f$ nunca se anula.

d) $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

e) $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Resolução

I) $f(-1) = e^{(-1)^2 + a\,.\,(-1) + b} = e^{1 - a + b} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - a + b = 0 \Leftrightarrow a - b = 1$

II) $f(-2) = e^{(-2)^2 + a\,.\,(-2) + b} = e^{4 - 2a + b} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 4$

III) $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ e,

desta forma, $f(x) = e^{x^2 + 3x + 2}$ e

$g(x) = \ell n\left(\dfrac{ax}{3b}\right) = \ell n\left(\dfrac{3x}{3\,.\,2}\right) = \ell n\left(\dfrac{x}{2}\right)$

IV) $gof(x) = g[e^{x^2 + 3x + 2}] = \ell n\left[\dfrac{e^{x^2 + 3x + 2}}{2}\right] =$

$= \ell n\ e^{x^2 + 3x + 2} - \ell n\, 2$. **Assim:**

$gof(x) = x^2 + 3x + 2 - \ell n\, 2$

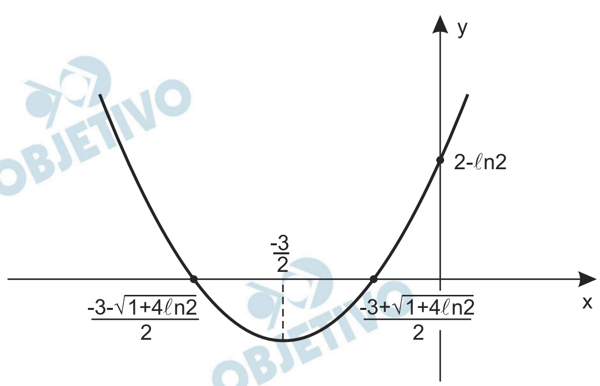
V) $gof(1) = 1^2 + 3\,.\,1 + 2 - \ell n\, 2 = 6 - \ell n\, 2$

$gof(0) = 0^2 + 3\,.\,0 + 2 - \ell n\, 2 = 2 - \ell n\, 2$

VI) **A equação** $x^2 + 3x + 2 - \ell n\, 2 = 0$ **possui duas raízes reais distintas, pois**

$\Delta = 3^2 - 4\,.\,1\,.\,(2 - \ell n\, 2) = 1 + 4\,\ell n\, 2 > 0$

Como $f(x) = e^{x^2 + 3x + 2} > 0$ **para todo x real, gof está definida para todo** $x \in \mathbb{R}$ **e tem gráfico do tipo**



Considere funções f, g, f + g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, f + g é injetora;

II. Se f e g são sobrejetoras, f + g é sobrejetora;

III. Se f e g não são injetoras, f + g não é injetora;

IV. Se f e g não são sobrejetoras, f + g não é sobrejetora,

é (são) verdadeira(s)

a) nenhuma. b) apenas I e II c) apenas I e III

d) apenas III e IV. e) todas.

Resolução

I) Falsa.

Considere as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = -x$. Ambas são injetoras e f + g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $(f + g)(x) = 0$ e não é injetora, pois é constante.

II) *Falsa*.

No exemplo anterior, as duas funções f e g são sobrejetoras, todavia f + g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (f + g)(x) = 0$ não é sobrejetora.

III) *Falsa*.

Considere as funções f, g, f + g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = -x^2 + x + 1$. As funções f e g não são injetoras, porém a função f + g é injetora, pois $(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$ $= (x^2 + x + 1) + (-x^2 + x + 1) = 2x + 2$ e f + g é do primeiro grau e estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

IV) *Falsa*.

No exemplo do item (III), as funções f e g apresentadas não são sobrejetoras, porém f + g é sobrejetora (na verdade, bijetora).

8 **C**

Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução

I) Se $n > 6$ é inteiro positivo e não divisível por 6, então $n = 6k + p$, com $k \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

II) Como $n^2 = (6k + p)^2 = 6(6k^2 + 2kp) + p^2$, o quociente da divisão de n^2 por 6 será $(6k^2 + 2kp)$ acrescido do quociente da divisão de p^2 por 6 e o resto será o mesmo resto da divisão de p^2 por 6.

III) Como o quociente da divisão de n^2 por 6 é *ímpar*, o quociente da divisão de p^2 por 6 deverá ser ímpar, pois $(6k^2 + 2kp)$ é sempre par.

IV) Assim, para:

- **$p = 1$, temos $p^2 = 1$ e $\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$, cujo quociente é par.**

- **$p = 2$, temos $p^2 = 4$ e $\begin{array}{r|l} 4 & 6 \\ \cline{2-2} 4 & 0 \end{array}$, cujo quociente é par.**

- ***$p = 3$, temos $p^2 = 9$ e $\begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$, cujo quociente é ímpar. e o resto é 3.***

- **$p = 4$, temos $p^2 = 16$ e $\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}$, cujo quociente é par.**

- **$p = 5$, temos $p^2 = 25$ e $\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$, cujo quociente é par.**

Considere a equação $\sum\limits_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a –2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum\limits_{n=0}^{5} a_n$ é igual a

a) –21. b) $-\frac{2}{3}$. c) $\frac{21}{32}$. d) $\frac{63}{32}$. e) 63.

Resolução

I) $\sum\limits_{n=0}^{5} a_n \cdot x_n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

II) $a_0 = 1$; $a_1 = q$; $a_2 = q^2$; $a_3 = q^3$; $a_4 = q^4$ **e** $a_5 = q^5$, **nesta ordem, estão em progressão geométrica de razão q.**

III) A soma de todas as raízes é –2, então:

$$-\frac{a_4}{a_5} = -2 \Leftrightarrow -\frac{q^4}{q^5} = -2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

IV) $\sum\limits_{n=0}^{5} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

$= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 =$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$

B

Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12$. Então a soma das soluções z, com Re z > 0, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

a) $\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{2}$. c) $4\sqrt{2}$. d) 4. e) 16.

Resolução

I) $\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\lambda + 17} = 12 - \sqrt{\lambda + 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lambda + 17 = 144 + \lambda + 9 - 24\sqrt{\lambda + 9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24\sqrt{\lambda + 9} = 136 - \lambda$, com $\lambda \leq 136 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 576\lambda + 5\,184 = 18\,496 - 272\lambda + \lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 848\lambda + 13\,312 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{848 \pm 816}{2} \Leftrightarrow \lambda = 832$ ou $\lambda = 16$

II) Para $\lambda = 16$, temos:

$z^4 = 16 - 32 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^4 = 16 \,.\, (\cos 180° + i \,.\, \text{sen } 180°)$

III) As raízes quartas de – 16 são, portanto:

$z_1 = 2(\cos 45° + i \,.\, \text{sen } 45°) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

$z_2 = 2(\cos 135° + i \,.\, \text{sen } 135°) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

$z_3 = 2(\cos 225° + i \,.\, \text{sen } 225°) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

$z_4 = 2(\cos 315° + i \,.\, \text{sen } 315°) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

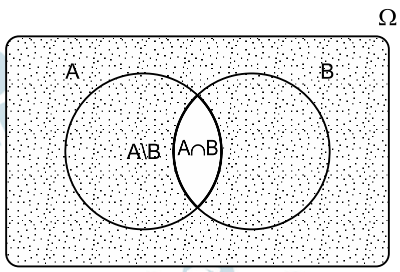
IV) Os valores de z tais que Re(z) > 0 são $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ e $\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$. A soma desses dois números é $2\sqrt{2}$.

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

a) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.
c) $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.
d) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.
e) $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Resolução

I) Observe, pelo diagrama a seguir, que
$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$ e
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Observe ainda que



$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C = \Omega - (A \cap B)$

II) $$P(A \setminus B) = \frac{n(A \setminus B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

III) $$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} =$$

$$= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

IV) $$P(A^C \cap B^C) = P(\Omega) - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

a) dos três resultados, I é o mais provável.

b) dos três resultados, II é o mais provável.

c) dos três resultados, III é o mais provável.

d) os resultados I e II são igualmente prováveis.

e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Resolução

I. A probabilidade de ocorrerem duas caras em dois lançamentos é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

II. A probabilidade de ocorrerem três caras e uma coroa em quatro lançamentos é:

$$C_{4,3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

III. A probabilidade de ocorrerem cinco caras e três coroas em oito lançamentos é:

$$C_{8,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

Portanto, os resultados I e II são igualmente prováveis.

13 C

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $\dfrac{1}{6}$. b) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. c) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{6}$. d) 1. e) $\sqrt{216}$.

Resolução

Sendo $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ e $\det(A) = \sqrt{6}$, temos:

$$\det(\alpha . A^t . A . A^t) = \sqrt{6} . \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 . \det(A^t) . \det A . \det(A^t) = \sqrt{6} . \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 . (\sqrt{6})^3 = \sqrt{6} . \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{6}, \text{ pois } \alpha \neq 0$$

Logo, $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{\sqrt[3]{36}}{6}$

14 E

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0,2\pi]$ da equação

$\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\,\text{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \dfrac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas III. c) apenas I e III.

d) apenas II e IV. e) todas.

Resolução

I) Observe que

$$\cos^8x = (\cos^2x)^4 = (1 - \text{sen}^2x)^4 = (1 - 2\,\text{sen}^2x + \text{sen}^4x)^2 =$$

$$= 1 + 4\,\text{sen}^4x + \text{sen}^8x - 4\text{sen}^2x + 2\text{sen}^4x - 4\text{sen}^6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^8x - \text{sen}^8x + 4\text{sen}^6x = 1 - 4\text{sen}^2x + 6\text{sen}^4x =$$

a

Assim, $6\text{sen}^4x - 4\text{sen}^2x + 1 - a = 0$

II) Para a = 0, temos:

$$6\text{sen}^4x - 4\text{sen}^2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{12} \notin \mathbb{R}$$

Logo: $\boxed{n = 0}$

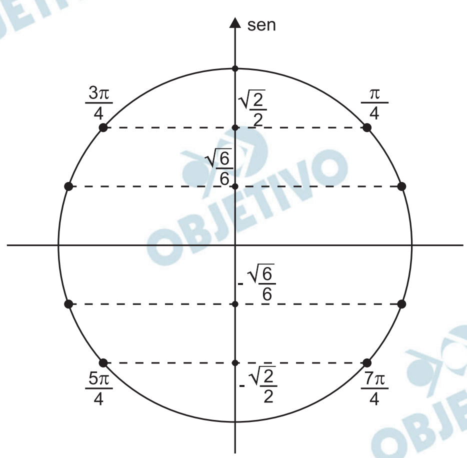
III) Para $a = \dfrac{1}{2}$, **temos:**

$$6\text{sen}^4x - 4\text{sen}^2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x = \frac{4 \pm 2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2x = \frac{1}{2} \text{ ou } \text{sen}^2x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou}$$

$\text{sen } x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$**. Desta forma, a equação possui**

$\boxed{n = 8}$ **soluções no intervalo $[0; 2\pi]$, como se vê no ciclo trigonométrico a seguir:**

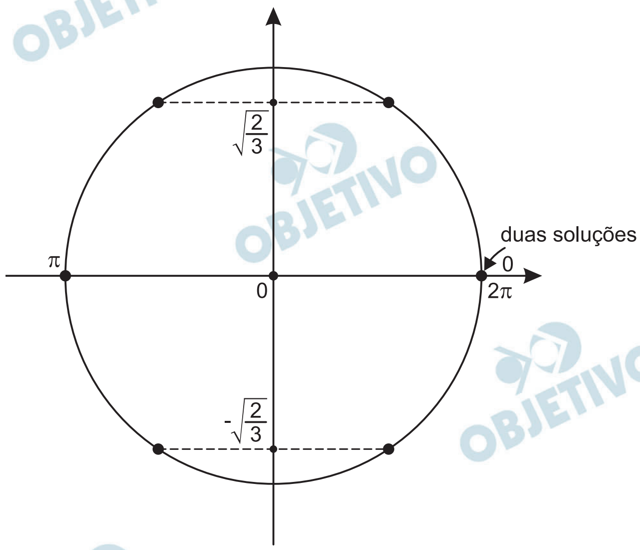


IV) Para a = 1, temos:

$6\text{sen}^4x - 4\ \text{sen}^2x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}^2x\ (3\text{sen}^2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\ x = 0$ **ou** $\text{sen}\ x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **Desta forma, a equação possui** $\boxed{n = 7}$ **soluções no intervalo** $[0;2\pi]$,

como se vê no ciclo trigonométrico a seguir:



V) Para a = 3, temos:

$6\text{sen}^4x - 4\text{sen}^2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\text{sen}^4x - 2\text{sen}^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x = \dfrac{2 \pm 4}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2x = 1$ **ou** $\text{sen}^2x = -\dfrac{1}{3}$ **(não serve)** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\ x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ **ou** $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Portanto, a equação dada tem $\boxed{n = 2}$ **soluções.**

Desta forma, todas as afirmações são verdadeiras.

Se $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$, então um possível valor de

$$\frac{\text{cotg}\ x - 1}{\text{cossec}\ (x - \pi) - \sec\ (\pi - x)} \text{ é}$$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. b) 1. c) $\sqrt{2}$. d) $\sqrt{3}$. e) 2.

Resolução

I) $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

II) Sendo $y = \dfrac{\text{cotg}\ x - 1}{\text{cossec}(x - \pi) - \sec\ (\pi - x)}$, temos:

$$y = \frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x} - 1}{\dfrac{1}{\text{sen}\ (x - \pi)} - \dfrac{1}{\cos\ (\pi - x)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos x - \text{sen}\ x}{\text{sen}\ x}}{-\dfrac{1}{\text{sen}\ x} + \dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos x - \text{sen}\ x}{\text{sen}\ x}}{\dfrac{-(\cos x - \text{sen}\ x)}{\text{sen}\ x \cdot \cos x}} =$$

$= -\cos x$

Portanto, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B

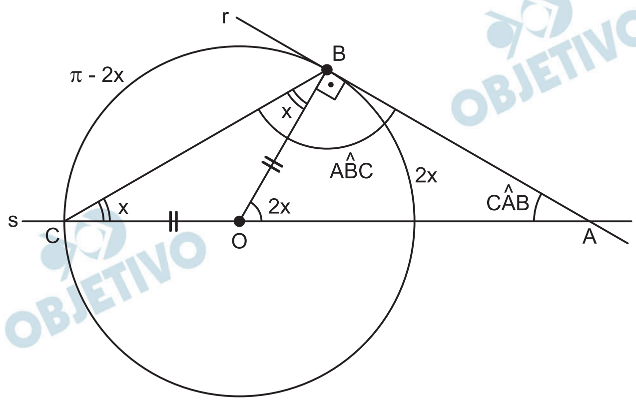
Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

a) $\dfrac{1}{2}\,A\hat{B}C$. b) $\dfrac{3}{2}\,\pi - 2\,A\hat{B}C$.

c) $\dfrac{2}{3}\,A\hat{B}C$. d) $2\,A\hat{B}C - \pi$.

e) $A\hat{B}C - \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução



I) $O\hat{C}B = O\hat{B}C = x$, **pois o triângulo COB é isósceles e portanto** $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow x = A\hat{B}C - \dfrac{\pi}{2}$

II) $C\hat{A}B$ **é ângulo excêntrico exterior e portanto**

$$C\hat{A}B = \frac{\pi - 2x - 2x}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - 2x$$

Assim:

$$C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - 2\,.\left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\,A\hat{B}C + \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{3\pi}{2} - 2\,A\hat{B}C$$

Sobre a parábola definida pela equação

$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

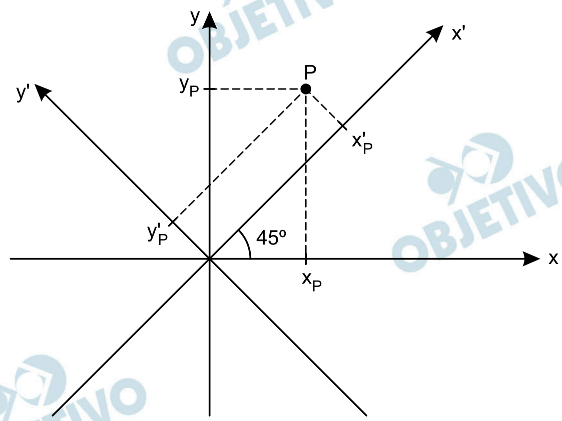
c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.

d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\dfrac{2}{3}$.

Resolução

I)



Lembrando que, havendo rotação de eixos, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} x'_P = x_P \cos\alpha + y_P \operatorname{sen}\alpha \\ y'_P = y_P \cos\alpha - x_P \operatorname{sen}\alpha \end{array}}$$ **ou, o que é equivalente,**

$$\boxed{\begin{array}{l} x_P = x'_P \cos\alpha - y'_P \operatorname{sen}\alpha \\ y_P = x'_P \operatorname{sen}\alpha + y'_P \cos\alpha \end{array}}$$

Para $\alpha = 45°$, temos:

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$

II) Substituindo na equação dada, teremos:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) . \left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ \left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ 4\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + (x')^2 - (y')^2 + \sqrt{2}\,(x') +$$
$$+ 3\sqrt{2}\,(y') + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\,(x')^2 + \sqrt{2}\,(x') + 3\sqrt{2}\,(y') + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-2}{3\sqrt{2}}(x')^2 - \frac{1}{3}x' - \frac{1}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y' = -\frac{\sqrt{2}}{3}(x')^2 - \frac{1}{3}x' - \frac{\sqrt{2}}{6}}$$

que, no sistema x'Oy', é a equação de uma parábola de vértice:

$$x'_v = \frac{+\frac{1}{3}}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e}$$

$$y'_v = -\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

III) No sistema x'Oy', o vértice é $V'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$.

Esse vértice no sistema xOy é

$V\left(-\frac{1}{8}; -\frac{3}{8}\right)$, pois:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,.\cos 45° - \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\text{sen } 45° =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{8} \text{ e}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4}\text{sen } 45° + \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\cos 45° =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{8}$$

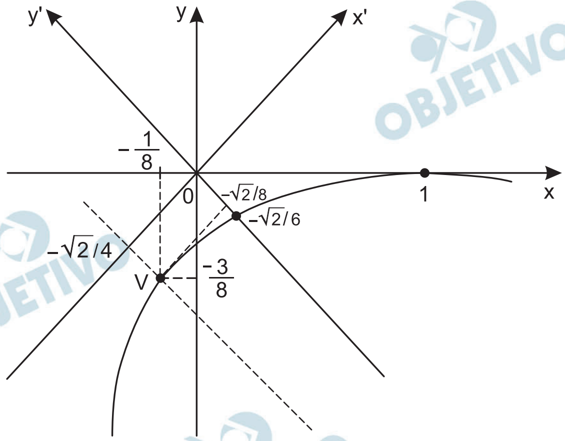
IV) Toda reta paralela ao eixo Ox é do tipo y = k (constante) e o sistema:

$$\begin{cases} y = k \\ x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2(k-1)x + (k^2 + 4k + 1) = 0$$

só admite solução única se $\Delta = -24k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Para k = 0, a equação será $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. A única reta paralela ao eixo *x* e tangente à parábola é o próprio eixo *x* e o ponto de tangência é (1; 0).

V)



18 D

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) III. b) I e III. c) II e III.

d) III e IV. e) I e II e IV.

Resolução

I) ***Falsa.***

Duas retas coplanares podem ser paralelas.

II) ***Falsa.***

Duas retas que não têm ponto em comum podem ser coplanares e neste caso são paralelas (distintas).

III) ***Verdadeira.***

Sejam r e s retas reversas, t a perpendicular comum a elas, $\{A\} = t \cap r$ e $\{B\} = t \cap s$

Podemos afirmar que:

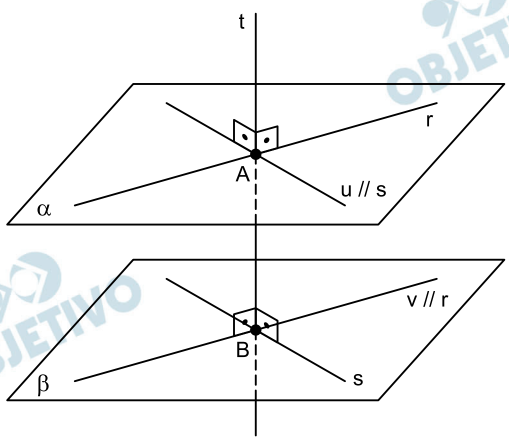
1) Existe uma única reta u, e paralela a s, tal que $A \in u$.

Assim, o plano $\alpha = p\ell\,(r; u)$ é perpendicular a t.

2) Existe uma única reta v, paralela a r, tal que $B \in v$.

Assim, o plano $\beta = p\ell\,(s; v)$ é perpendicular a t.

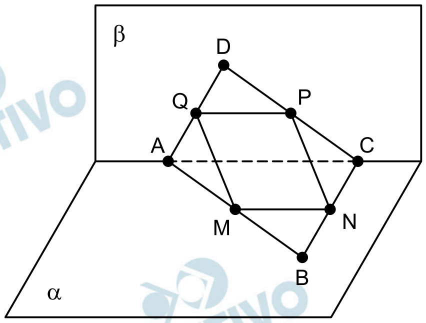
Os planos α e β são paralelos (não coincidentes), $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.



Como α é o único plano conduzido por A, perpendicular a t, e β é o único plano conduzido por B, perpendicular a t, concluímos que existem dois, e apenas dois, planos paralelos (α e β), cada um contendo uma das retas.

IV) *Verdadeira.*

Seja ABCD um quadrilátero reverso, cujos pontos médios dos lados são os pontos M, N, P e Q, conforme a figura seguinte:



No triângulo ABC, contido no plano α, temos:

$\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$ e $MN = \dfrac{AC}{2}$ (I)

No triângulo DAC, contido no plano β, temos:

$\overline{QP} \,//\, \overline{AC}$ e $QP = \dfrac{AC}{2}$ (II)

De (I) e (II), temos, finalmente:

$\overline{MN} \,//\, \overline{QP}$ e $MN = QP$ e assim podemos concluir que o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo.

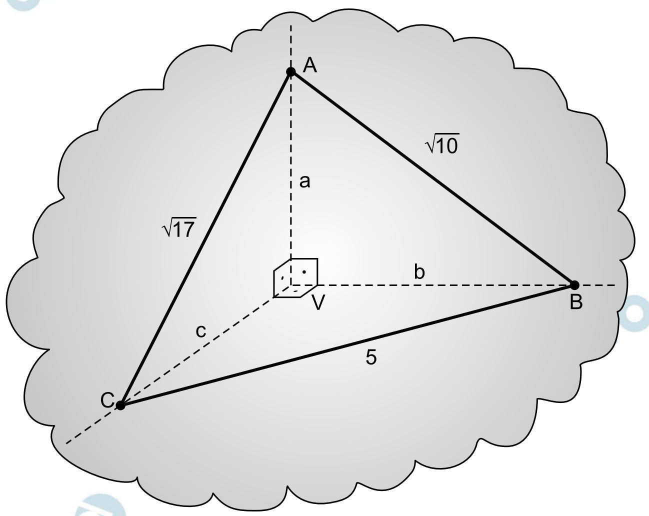
19 A

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2. b) 4. c) $\sqrt{17}$.

d) 6. e) $5\sqrt{10}$.

Resolução



Sendo VA = a, VB = b e VC = c, todos em cm, temos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (\sqrt{10})^2 \\ b^2 + c^2 = 5^2 \\ a^2 + c^2 = (\sqrt{17})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ b^2 + c^2 = 25 \\ a^2 + c^2 = 17 \end{cases}$$

Somando membro a membro as três equações, temos:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 52 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 26$

Assim, $a^2 + b^2 + c^2 = 26 \Rightarrow 10 + c^2 = 26 \Rightarrow c = 4;$

$a^2 + b^2 + c^2 = 26 \Rightarrow a^2 + 25 = 26 \Rightarrow a = 1;$

$a^2 + b^2 + c^2 = 26 \Rightarrow 17 + b^2 = 26 \Rightarrow b = 3.$

Logo, o volume V do sólido VABC, em cm^3, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2} \cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 2$$

20 B

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2,5)$ e $C = (0,1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão

$$\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$$, em unidade de comprimento,

é igual a

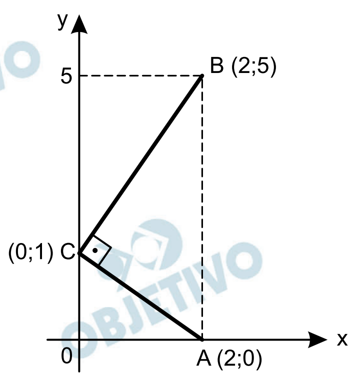
a) 1.   b) $\frac{100}{105}$.   c) $\frac{10}{11}$.

d) $\frac{100}{115}$.   e) $\frac{5}{6}$.

Resolução

I) O triângulo de vértices A = (2; 0), B = (2; 5) e C = (0; 1) é retângulo em C, pois

$$m_{AC} = -\frac{1}{2} \text{ e } m_{BC} = 2$$



II) Sendo R o raio da base do cilindro de altura 8, temos:

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$$

Logo, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}} =$

$$= \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 8}{2\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot 8} = \frac{100}{105}$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Para $z = 1 + iy$, $y > 0$, determine todos os pares (a, y), $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva a e y em função de Arg z.

Resolução

I) Seja $z = 1 + yi = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

com $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, pois $y > 0$

II) Se $z^{10} = a$, com $a > 1$, então:

$\rho^{10} \cdot [\cos(10\theta) + i \cdot \text{sen}(10\theta)] = a$

III) $\rho^{10} = a$ e $10\theta = k2\pi$

IV) $\begin{cases} 10\theta = k2\pi \\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{k\pi}{5} \\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{5}$ ou $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$

V) $\begin{cases} \rho\cos\theta = 1 \\ \rho^{10} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sec\theta \\ \rho^{10} = a \end{cases} \Rightarrow a = \sec^{10}\theta$

VI) $y = \rho \cdot \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta = \text{tg}\,\theta$

Resposta:

$(\sec^{10}\theta; \text{tg}\,\theta)$, com $\theta = \dfrac{\pi}{5}$ ou $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função

$f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} (4 \text{ sen } x \cos x - 1)$.

Resolução

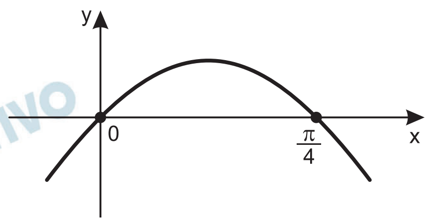
I) O "maior domínio" $D \subset \mathbb{R}$ da função

$f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} (4 \text{ sen } x \cos x - 1)$ é tal que:

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1 \\ 4 \text{ sen } x \cos x - 1 > 0 \end{cases}$$

II) $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$, pois o gráfico de

$g(x) = x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ é do tipo



III) $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$ para qualquer x real, pois a equação

$x^2 - \frac{\pi}{4} x + 1 = 0$ não tem raízes reais

IV) $4 \text{ sen } x \cdot \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ sen } (2x) - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen } (2x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$$

V) De (II), (III) e (IV), temos $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

Resposta: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$

Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x, $x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2, 2[$.

Resolução

I) A soma das raízes de $P(m) = am^2 - 3m - 18$ é igual a 3, então: $3 = -\frac{(-3)}{a} \Leftrightarrow a = 1$

II) Para a = 1, temos $P(m) = m^2 - 3m - 18$, cujas raízes são m = 6 e m = – 3

III) Para m = 6, temos:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x^2 + 5x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ pois}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 10 & 5 & -1 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 0 & \end{array}$$

IV) Para m = – 3, temos:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2 \pm i, \text{ pois}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 5 & -1 \\ \hline 1 & -4 & 5 & 0 & \end{array}$$

V) Para que duas, e apenas duas, soluções da equação estejam no intervalo]– 2; 2[, devemos ter m = 6.

Resposta: m = 6

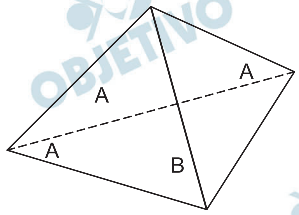
Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Resolução

I) Utilizando apenas uma cor, existem 4 possibilidades.

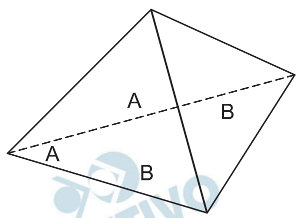
II) Utilizando duas cores, podemos ter:

a) três faces de uma cor e outra de outra cor, como no exemplo a seguir.

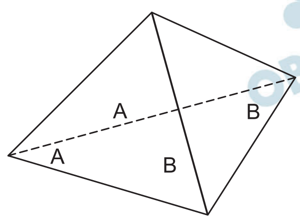


Neste caso, existem 4 . 3 = 12 possibilidades

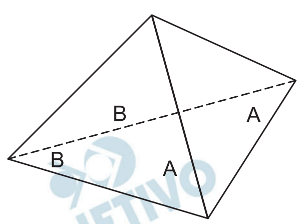
b) duas faces de uma cor e as outras duas de outra cor, como no exemplo a seguir.



Neste caso, existem $\dfrac{4 \,.\, 3}{2}$ = 6 possibilidades, pois os tetraedros

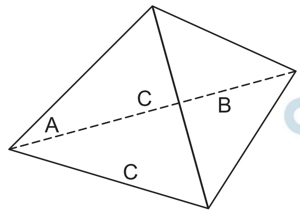


e

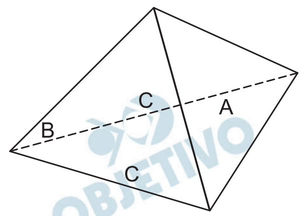


são idênticos por uma rotação conveniente.

III) Utilizando três cores, duas faces terão a mesma cor. Observe que as duas configurações a seguir

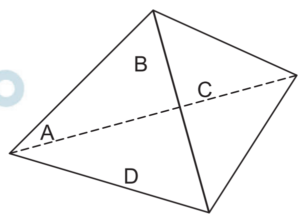


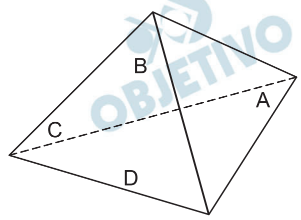
e



são idênticas, pois uma rotação conveniente da primeira permite obter a segunda. Neste caso, existem 4 . $C_{3;2}$ = 12 possibilidades.

IV) Utilizando as quatro cores, existem apenas duas possibilidades, pois as configurações





nunca coincidem.

V) Ao todo, existem 4 + 12 + 6 + 12 + 2 = 36 possibilidades.

Resposta: 36

Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta. \end{cases}$$

a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Resolução

a) As raízes da equação

$x^2 - x = \alpha \Leftrightarrow x^2 - x - \alpha = 0$ são $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$

e são reais somente se $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$

Para que pelo menos uma delas seja raiz da equação $x - x^3 = \beta$, devemos ter:

$x - x^3 = \beta \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = \beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - x)(1 + x) = -\beta \Leftrightarrow \alpha(1 + x) = -\beta$ e,

portanto, $\alpha\left(1 + \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}\right) = -\beta$

$\Leftrightarrow \beta = -\dfrac{\alpha}{2}(3 \pm \sqrt{1 + 4\alpha})$

b) Com os valores de β encontrados no item (a), concluímos que pelo menos um dos valores, $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$ ou $\dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$, é raiz da equação $x - x^3 = \beta$.

Se r for essa raiz, então na equação $x - x^3 = \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3 - x + \beta = 0$, por Briot-Ruffini, temos:

1	0	-1	β	r
1	r	$-1 + r^2$	0	

As demais raízes dessa equação são as raízes de $x^2 + rx + r^2 - 1 = 0$. A saber:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4 \cdot 1(r^2 - 1)}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{4 - 3r^2}}{2}$$

Respostas:

a) $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$ e $\beta = -\dfrac{\alpha}{2}(3 \pm \sqrt{1 + 4\alpha})$

b) $V = \left\{r; \dfrac{-r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}; \dfrac{-r - \sqrt{4 - 3r^2}}{2}\right\}$, com

$r = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$ ou $r = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} \alpha + 3y \cos \alpha = a \\ x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = b, \end{cases}$$

com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Resolução

i) $D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & 3 \cos \alpha \\ \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha =$

$= 1 - \cos^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 1 - 4\cos^2\alpha$

O sistema será possível e determinado quando $D \neq 0$, independentemente dos valores de a e b.

Assim, $1 - 4\cos^2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2\alpha \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha \neq \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3}$, **pois** $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Utilizando o Método de Cramer para resolver o sistema, temos:

a) $D_x = \begin{vmatrix} a & 3\cos\alpha \\ b & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix} = a \,.\, \operatorname{sen}\alpha - 3b\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{a \,.\, \operatorname{sen}\alpha - 3b \,.\, \cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$

b) $D_y = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & a \\ \cos\alpha & b \end{vmatrix} = b \,.\, \operatorname{sen}\alpha - a \,.\, \cos\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \frac{D_y}{D} =$

$\frac{b \,.\, \operatorname{sen}\alpha - a \,.\, \cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$

Logo:

$$S = \left\{\left(\frac{a.\operatorname{sen}\alpha - 3b.\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}; \frac{b.\operatorname{sen}\alpha - a.\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}\right)\right\}$$

ii) **Para** $\alpha = \frac{\pi}{3}$, **temos:**

$$\begin{cases} x \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + 3y \,.\, \cos\frac{\pi}{3} = a \\ x \,.\, \cos\frac{\pi}{3} + y \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{3}{2}y = a \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = 2a \\ x + \sqrt{3}y = 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = 2a \\ \sqrt{3}x + 3y = 2b\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim, o sistema será possível indeterminado quando $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ e $2a = 2b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$

Na equação $\sqrt{3}x + 3y = 2a$, para $a = b\sqrt{3}$, temos:

$$x = \frac{2b\sqrt{3} - 3y}{\sqrt{3}} = \frac{6b - 3\sqrt{3}y}{3} = 2b - \sqrt{3}\,y$$

e o conjunto solução do sistema é

$S = \{(2b - \sqrt{3}y;\ y), \text{ com } y \in \mathbb{R}\}$

iii) O sistema será impossível para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ e $a \neq b\sqrt{3}$

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e

$\sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

Resolução

I) $(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)\,.\cos\alpha\,.\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta}\right).\cos\alpha\,.\,\text{sen}\,\beta -$$

$$-\,2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\,.\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,.\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 \text{ ou } \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 + k\,.\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou } \alpha - \beta = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,.\,2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta, \text{ pois } \alpha, \beta \in 1.^\circ \text{ quadrante.}$$

II) $\sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\,.\,\text{sen}(\alpha + \beta) +$$

$$+\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\,.\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\,.\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou } \alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k\,.\,2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

pois α e $\beta \in 1.^\circ$ quadrante.

Assim, temos os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$$

Resposta: $\left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{12}\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$

28

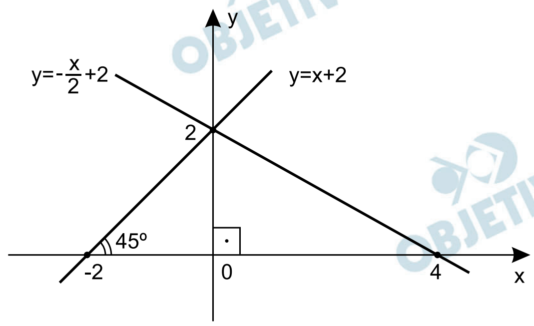
Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \text{ e } x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$$

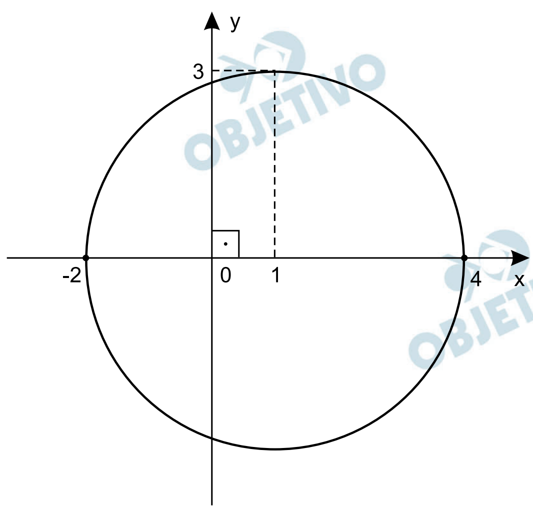
Resolução

I) $\mathbf{(y - x - 2) \cdot \left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow y = x + 2 \text{ ou } y = -\frac{x}{2} + 2}$



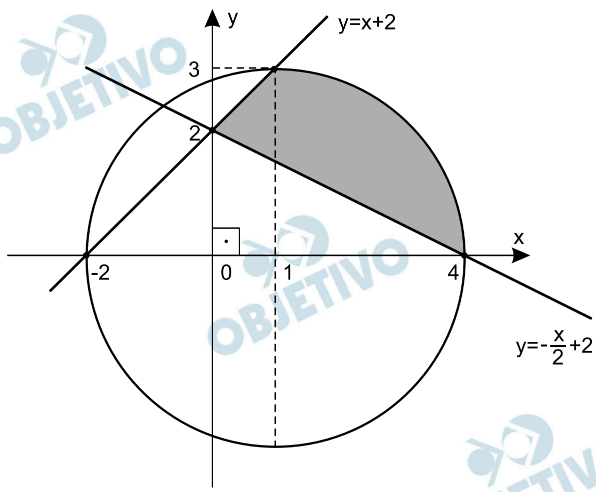
II) $\mathbf{x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 9}$**, que é a equação de uma circunferência de centro (1; 0) e raio 3.**



III) Sendo S a área situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2) \,.\, \left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \text{ e}$$

$x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$, temos:



$$S = \frac{3\,.\,3}{2} + \frac{1}{4}\,.\,(\pi\,.\,3^2) - \frac{6\,.\,2}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\,.\,\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$$

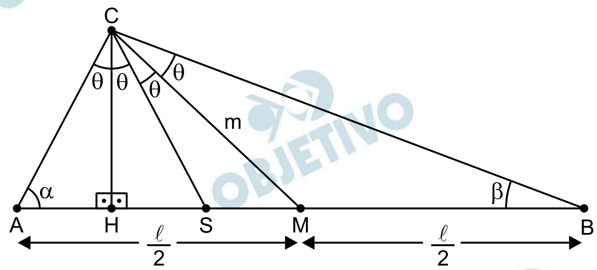
Resposta: $\frac{3}{2}\,.\,\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$ unidades de área

Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se ℓ é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de ℓ.

b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Resolução



Sejam: $\alpha = med(C\hat{A}B)$, $\beta = med(A\hat{B}C)$, $4\theta = med(B\hat{C}A)$ e m a medida da mediana $\overline{CM}$.

I) No triângulo retângulo HAC, temos:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \theta$$

II) No triângulo retângulo HBC, temos:

$$\beta + 3\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - 3\theta \Rightarrow \text{sen } \beta = \cos 3\theta$$

III) No triângulo CAM, de acordo com a lei dos senos, temos:

$$\frac{m}{\text{sen } \alpha} = \frac{\ell}{2 \text{ sen } 3\theta} \Leftrightarrow \frac{m}{\cos \theta} = \frac{\ell}{2 \text{ sen } 3\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\cos \theta}{2 \text{ sen } 3\theta}$$

IV) No triângulo CBM, ainda de acordo com a lei dos senos, temos:

$$\frac{m}{\text{sen } \beta} = \frac{\ell}{2 \text{ sen } \theta} \Leftrightarrow \frac{m}{\cos 3\theta} = \frac{\ell}{2 \text{ sen } \theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\cos 3\theta}{2 \text{ sen } \theta}$$

V) Das igualdades obtidas em (III) e (IV), temos:

$$\frac{\cos \theta}{2 \text{ sen } 3\theta} = \frac{\cos 3\theta}{2 \text{ sen } \theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \text{ sen } \theta \cos \theta = 2 \text{ sen } 3\theta \cos 3\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } 2\theta = \text{sen } 6\theta \Leftrightarrow 2\theta + 6\theta = \pi, \text{ pois } \theta \neq 0$$

Assim: $8\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{8}$

VI) O ângulo $B\hat{C}A$ é reto, pois $4\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Assim, podemos concluir que o triângulo $C\hat{A}B$ é retângulo em C e sua hipotenusa $\overline{AB}$ tem medida ℓ.

Logo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é $CM = \dfrac{AB}{2}$, ou seja, $m = \dfrac{\ell}{2}$

VII) Como $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, então:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

Respostas: a) $\dfrac{\ell}{2}$

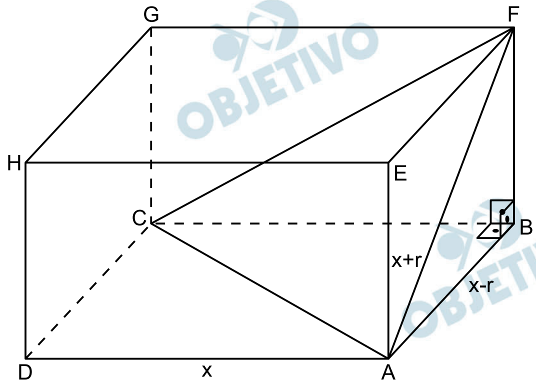
b) $C\hat{A}B = \dfrac{3\pi}{8}$, $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{8}$ e $B\hat{C}A = \dfrac{\pi}{2}$

Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que volume da pirâmide ABCF é igual a 10 cm^3. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Resolução



Todas as medidas lineares são em centímetros.

a) Sendo AB = x – r, AD = x e AE = x + r, temos:

$x - r + x + x + r = 12 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Como o volume da pirâmide ABCF é igual a 10 cm^3, temos:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot BF = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-r) \cdot x}{2} \cdot (x+r) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{(4-r) \cdot 4}{2} \cdot (4+r) = 10 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 16 - r^2 = 15 \Leftrightarrow r = 1$, **supondo** $r > 0$

Assim:

$AB = 4 - 1 = 3$, $AD = 4$ **e** $AE = 4 + 1 = 5$

b) Sendo V o volume, em cm^3, e A_T a área total, em cm^2, do paralelepípedo, temos:

$V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ **e**

$A_T = 2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = 94$

Respostas: a) 3 cm, 4 cm e 5 cm

b) 60 cm^3 e 94 cm^2