

NOTAÇÕES

\mathbb{N} :	conjunto dos números naturais	$\arg z$:	argumento do número complexo z
\mathbb{R} :	conjunto dos números reais	$[a, b]$ =	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
\mathbb{R}^+ :	conjunto dos números reais não-negativos	$A \setminus B$ =	$\{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
i :	unidade imaginária; $i^2 = -1$	A^C :	complementar do conjunto A
$P(A)$:	conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A		
$n(A)$:	número de elementos do conjunto finito A		
\overline{AB} :	segmento de reta unindo os pontos A e B		
\widehat{AB} :	arco de circunferência de extremidades A e B		

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

A () 6. B () 8. C () 10. D () 12. E () 14.

Questão 2. Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

A () $\frac{2}{9}$. B () $\frac{1}{3}$. C () $\frac{4}{9}$. D () $\frac{5}{9}$. E () $\frac{2}{3}$.

Questão 3. Sejam $z = n^2(\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ)$ e $w = n(\cos 15^\circ + i \sen 15^\circ)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

A () $\sqrt{3} + i$. B () $2(\sqrt{3} + i)$. C () $2(\sqrt{2} + i)$.
D () $2(\sqrt{2} - i)$. E () $2(\sqrt{3} - i)$.

Questão 4. Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

A () $-\frac{\pi}{2}$. B () $\frac{\pi}{4}$. C () $\frac{\pi}{2}$. D () $\frac{3\pi}{4}$. E () $\frac{7\pi}{4}$.

Questão 5. Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

A () apenas I.

B () apenas II.

C () apenas III.

D () apenas I e II.

E () I, II e III.

Questão 6. As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

A () $2(1 - \sqrt{2})$.

B () $\sqrt{2} - 4$.

C () $2(2 + \sqrt{2})$.

D () $4 + \sqrt{2}$.

E () $4(\sqrt{2} - 1)$.

Questão 7. Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127 . Então, o produto xyz é igual a

A () -60 .

B () -30 .

C () 0 .

D () 30 .

E () 60 .

Questão 8. Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

A () $5(5 - 2\sqrt{3})$.

B () $15(5 - 2\sqrt{3})$.

C () $30(5 - 2\sqrt{3})$.

D () $45(5 - 2\sqrt{3})$.

E () $50(5 - 2\sqrt{3})$.

Questão 9. Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$ e $c = \frac{1}{2} \text{ cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm , é igual a

A () $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$.

B () $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C () $\frac{\sqrt{3} + 1}{3}$.

D () $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

E () $\frac{\sqrt{3} + 2}{4}$.

Questão 10. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (0, 6)$ e $C = (4, 3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A , em unidades de distância, é igual a

- A () $\frac{5}{3}$. B () $\frac{\sqrt{97}}{3}$. C () $\frac{\sqrt{109}}{3}$. D () $\frac{\sqrt{5}}{3}$. E () $\frac{10}{3}$.

Questão 11. A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r : x - 3y + 3 = 0$ e $s : 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

- A () $\frac{19}{2}$. B () 10. C () $\frac{25}{2}$. D () $\frac{27}{2}$. E () $\frac{29}{2}$.

Questão 12. Dados os pontos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (1, 1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A , do triângulo ABC é um par de retas definidas por

- A () $r_{1,2} : \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$. B () $r_{1,2} : \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$.
 C () $r_{1,2} : 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$. D () $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$.
 E () $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$.

Questão 13. Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto universo U . Das afirmações:

- I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;
 II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;
 III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

- A () I. B () II. C () III.
 D () I e III. E () II e III.

Questão 14. Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

- A () um único valor. B () apenas dois valores distintos.
 C () apenas três valores distintos. D () apenas quatro valores distintos.
 E () mais do que quatro valores distintos.

Questão 15. Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x
 $a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0, \beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;

II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;

III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;

IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

A () *I*. B () *I* e *III* C () *II* e *III*.

D () *II* e *IV*. E () *I*, *III* e *IV*.

Questão 16. Seja $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \arcsen\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \arccos\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}$. Então,

A () $S = \emptyset$. B () $S = \{0\}$. C () $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

D () $S = \mathbb{R}^+$. E () $S = \mathbb{R}$.

Questão 17. Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\tg(x)$ são, respectivamente

A () 1 e 0. B () 1 e $\frac{5}{2}$. C () -1 e 0.

D () 1 e 5. E () -1 e $-\frac{5}{2}$.

Questão 18. A soma $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

A () $-\cos(\alpha)$ quando n é par. B () $-\sen(\alpha)$ quando n é ímpar.

C () $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar. D () $\sen(\alpha)$ quando n é par.

E () zero quando n é ímpar.

Questão 19. Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

A () $\frac{1}{4}$. B () $\frac{1}{3}$. C () $\frac{1}{2}$. D () $\frac{2}{3}$. E () $\frac{3}{4}$.

Questão 20. A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a $3\pi \text{ cm}^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3 , respectivamente

- A () 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$. B () 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$. C () 4π e $\pi\sqrt{2}$.
- D () 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$. E () π e $2\pi\sqrt{2}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Questão 22. Determine os valores reais de x de modo que $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Questão 23. Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1 + x_1, 1 + x_2, \dots, 1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que (x_1, x_2, \dots, x_n) é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Questão 24. Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n + 5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1} .

Questão 25. Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2} \text{ cm}$ do centro de ω . Considere os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} tangentes a ω nos pontos A e B , respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos \overline{PA} e \overline{PB} e pelo arco menor \widehat{AB} em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento \overline{PA} , obtém-se um sólido de revolução. Determine:

- a) A área total da superfície do sólido.
- b) O volume do sólido.

Questão 26. As interseções das retas $r : x - 3y + 3 = 0$, $s : x + 2y - 7 = 0$ e $t : x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

- a) A área total da superfície do prisma.
- b) O volume do prisma.

Questão 27. Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n .

Questão 28. Analise se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Questão 29. Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0$.

Questão 30. As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P , exterior a um círculo ω . A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 intercepta ω nos pontos B e C diametralmente opostos. A medida do arco \widehat{AC} é 60° e \overline{PA} mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco \widehat{AB} .