NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
det M: determinante da matriz M
P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
n(A): número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B
$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k, k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 B

Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\,i$.
b) -1.
c) 0.
d) 1.
e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\,i$.

Resolução

I) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = 1\,(\cos 120° + i\,.\,\text{sen}\,120°)$

II) $z^2 = 1\,.\,(\cos 240° + i\,.\,\text{sen}\,240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

III) $z^{89} = 1^{89}\,.\,[\cos(89\,.\,120°) + i\,.\,\text{sen}\,(89\,.\,120°) =$
$= \cos 10\,680° + i\,.\,\text{sen}\,10\,680° =$
$= \cos 240° + i\,.\,\text{sen}\,240° = z^2$

IV) $\sum_{n=1}^{89} z^n = z + z^2 + \ldots + z^{89} = \frac{z\,.\,(1 - z^{89})}{1 - z} =$

$= \frac{z\,.\,(1 - z^2)}{1 - z} = z\,.\,(1 + z) = z + z^2 =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = -1$

Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I) $|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2||$.

II) $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||$.

III) Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \ne 0$, então

$z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas II e III. e) todas.

Resolução

I) $|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2||$ **é falsa, pois, se**

$z_1 = 1$ **e** $z_2 = -3$**, por exemplo, temos**

$|z_1| = 1, |z_2| = 3, \ |z_1| - |z_2| = 1 - 3 = -2,$

$||z_1| - |z_2|| = |-2| = 2$ **e** $|z_1 - z_2| = |1 - (-3)| = 4,$

Neste caso $|z_1 - z_2| > ||z_1| - |z_2||$

II) $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||$ **é falsa, pois, se por exemplo,**

$z_1 = 1 - i$ **e** $z_2 = 3 + 4i$**, temos:**

$\bar{z}_1 = 1 + i,$

$\bar{z}_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (3 + 4i) = -1 + 7i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\bar{z}_1 \cdot z_2| = |-1 + 7i| = 5\sqrt{2}$

Além disso, $\bar{z}_2 = 3 - 4i \Leftrightarrow |\bar{z}_2| = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2|| = |5 \cdot 5| = 25 \ne |\bar{z}_1 \cdot z_2|$

III) Verdadeira

$z_1 = |\bar{z}_1| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^{-1} = |\bar{z}_1|^{-1} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] =$

$= |z_1|^{-1} \cdot (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$ **pois**

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ **e** $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

3 E

A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$:

$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2. b) $\frac{i}{2}$. c) 0. d) $-\frac{1}{2}$. e) $-2i$.

Resolução

Sendo $z = a + bi$, temos:

$$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + bi)^2 + a^2 + b^2 + i\,(a + bi) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 + a^2 + b^2 + ai + bi^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2abi - b^2 + b^2 + ai - b - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - b - 1) + (2ab + a)\,.\,i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b - 1 = 0 \\ 2ab + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b - 1 = 0 \\ a\,.\,(2b + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 = -i \text{ ou } z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ou } z_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Assim, $z_1 + z_2 + z_3 = -i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -2i$

4 B

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

a) $\frac{7}{8}$. b) $\frac{5}{7}$. c) $\frac{5}{8}$. d) $\frac{3}{5}$. e) $\frac{3}{7}$.

Resolução

I) 5 moedas são do tipo $\boxed{\text{Ca}\,|\,\text{Ca}}$, 10 do tipo $\boxed{\text{Ca}\,|\,\text{Co}}$ e 25 do tipo $\boxed{\text{Co}\,|\,\text{Co}}$.

II) Se uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma *coroa*, então esta moeda é do tipo $\boxed{\text{Ca}\,|\,\text{Co}}$ ou do tipo $\boxed{\text{Co}\,|\,\text{Co}}$ e, portanto, o total de possibilidades é 35.

III) Das 35 moedas do item (II), existem 25 do tipo $\boxed{\text{Co}\,|\,\text{Co}}$.

IV) A probabilidade pedida é $\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$.

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$.

Então, das afirmações abaixo:

I) $n(B) - n(A)$ é único;

II) $n(B) + n(A) \leq 128$;

III) a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas I e II. e) nenhuma.

Resolução

Observemos que $\{\mathbb{C} : \mathbb{C} \subset B \setminus A\} = P(B \setminus A)$, onde $P(B \setminus A)$ é o conjunto das partes (subconjuntos) de $B \setminus A$. Assim,

$n(\{\mathbb{C} : \mathbb{C} \subset B \setminus A\}) = n[P(B \setminus A)] = 128 = 2^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n(B \setminus A) = 7 \Leftrightarrow n(B) - n(A) = 7$, pois $A \subset B$.

Desta forma, a dupla $(n(A), n(B))$ é qualquer do conjunto $\{(1; 8), (2; 9), (3; 10); \ldots\ldots\}$

I) Verdadeira, pois $n(B) - n(A) = 7$

II) Falsa, pois $(n(A), n(B)) = (61; 68)$, por exemplo teremos $n(B) + n(A) = 68 + 61 = 129 > 128$

III) Falsa, pois existem infinitas duplas ordenadas $(n(A), n(B))$, conforme exposto acima.

O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad y + 2z = b \\ 3x - y - 5c\, z = 0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \dfrac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \dfrac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \dfrac{7b}{3}$.

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad y + 2z = b \\ 7y + (5c + 9)z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad y + 2z = b \\ (5c - 5)z = 3a - 7b \end{cases}$$

A terceira equação e, portanto, o sistema:

I) Admite solução única se, e somente se, $5c - 5 \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 1$

II) Admite infinitas soluções se, e somente se, $5c - 5 = 0$ **e** $3a - 7b = 0 \Leftrightarrow c = 1$ **e** $a = \dfrac{7b}{3}$

III) Não admite solução se, e somente se, $5c - 5 = 0$ **e** $3a - 7b \neq 0 \Leftrightarrow c = 1$ **e** $a \neq \dfrac{7b}{3}$

Desta forma, o sistema admite solução se

$a = \dfrac{7b}{3}$ **ou** $c \neq 1$

Considere as afirmações abaixo:

I) Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não nula e não inversível, então existe matriz não nula N, de mesma ordem, tal que M N é matriz nula.

II) Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não nula X, de ordem n x 1, tal que $MX = X$.

III) A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível,

$\forall \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

Resolução

I) Verdadeira.

Se M é uma matriz quadrada não nula e não inversível, então $\det M = 0$.

Considere $N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$

A igualdade $M . N = 0$, em que 0 é a matriz nula de ordem n, equivale a n sistemas lineares homogêneos do tipo

$$M . \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estes sistemas são possíveis e indeterminados, pois $\det M = 0$, admitem solução não trivial e, portanto, existirá pelo menos um $a_{pk} \neq 0$, para $p, k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$.

Assim, de fato, existe N não nula, tal que M . N é nula.

Um exemplo dessa situação é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

e $N = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ambas não são nulas e

$$M . N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II) Verdadeira.

Se M é inversível, então det M ≠ 0. Assim, sendo I a matriz identidade, temos:

1) $\det(M^2 - M) = 0 \Leftrightarrow \det[M \,.\, (M - I)] = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det M \,.\, \det(M - I) = 0 \Leftrightarrow \det(M - I) = 0$

2) A matriz X, de ordem n x 1, que satisfaz a equação M . X = X é tal que:
$M \,.\, X = X \Leftrightarrow M \,.\, X - X = 0 \Leftrightarrow (M - I) \,.\, X = 0$
Assim, X é solução de um sistema linear homogêneo possível e indeterminado, pois det (M – I) = 0. Como esse sistema admite solução não trivial, existe a matriz X não nula.

III) Verdadeira.

Lembrando que $1 - 2\,\text{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2} = \cos\left(2 \,.\, \dfrac{\theta}{2}\right) = \cos \theta$

e que

$\dfrac{\text{tg}\,\theta}{\sec\theta} = \text{tg}\,\theta \,.\, \cos\theta = \text{sen}\,\theta$, para $\forall\, \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

temos:

$$\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta \\ \dfrac{\text{tg}\,\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\,\text{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \neq 0.$$

Portanto, a matriz tem inversa.

8 C

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) – 64. b) – 36. c) – 28. d) 18. e) 27.

Resolução

x = 1 é raiz dupla

1	0	1	a	b	1
1	1	2	2 + a	2 + a + b	1
1	2	4	6 + a		

$$\begin{cases} 2 + a + b = 0 \\ 6 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = 36 - 64 = -28$$

9 A

O produto das raízes reais da equação

$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) –5. b) –1. c) 1. d) 2. e) 5.

Resolução

$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 3$ ou $x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$ ou $x^2 - x - 1 = 0$

Como as duas equações tem somente raízes reais, o produto das quatro raízes resulta

$(x_1 \,.\, x_2) \,.\, (x'_1 \,.\, x'_2) = 5 \,.\, (-1) = -5$

10 A

Considere a equação algébrica $\sum\limits_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

a) a soma de todas as raízes é 5.

b) o produto de todas as raízes é 21.

c) a única raiz real é maior que zero.

d) a soma das raízes não reais é 10.

e) todas as raízes são reais.

Resolução

I) $\sum\limits_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = (x - a_1)^3 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^1 = 0$

II) (a_1, a_2, a_3) **é progressão geométrica com** $a_1 = 2$, **razão q e soma 6, portanto,** $2 + 2q + 2q^2 = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = -2$ **ou** $q = 1$

III) $(a_1, a_2, a_3) = (2, -4, 8)$ **ou** $(a_1, a_2, a_3) = (2, 2, 2)$

IV) Se $(a_1, a_2, a_3) = (2, 2, 2)$, **então a equação dada seria** $(x - 2)^3 + (x - 2)^2 + (x - 2) = 0$, **que não admite zero como raiz.**

V) A única possibilidade é, pois, $(a_1, a_2, a_3) = (2, -4, 8)$ **e, neste caso, a equação dada é**

$(x - 2)^3 + (x + 4)^2 + (x - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 21x = 0 \Leftrightarrow x \,.\, [x^2 - 5x + 21] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ **ou** $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{59}\, i}{2}$

VI) O conjunto verdade da equação dada é

$\left\{0; \dfrac{5 + \sqrt{59}\, i}{2}; \dfrac{5 - \sqrt{59}\, i}{2}\right\}$ **e a única afirmação verdadeira é que a soma de todas as raízes é 5.**

A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com x e y reais, representa

a) o conjunto vazio.

b) um conjunto unitário. ,

c) um conjunto não unitário com um número finito de pontos.

d) um conjunto com um número infinito de pontos.

e) o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

Resolução

I) $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0 \Leftrightarrow$

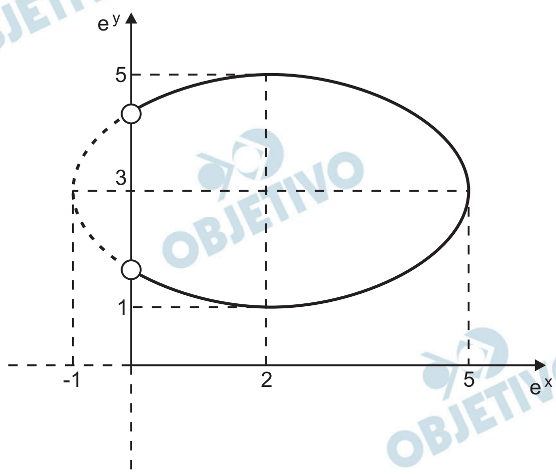
$\Leftrightarrow 4e^{2x} - 16e^x + 16 + 9e^{2y} - 54e^y + 81 + 61 = 16 + 81 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(e^x - 2)^2 + 9(e^y - 3)^2 = 36 \Leftrightarrow$

$$\frac{(e^x - 2)^2}{9} + \frac{(e^y - 3)^2}{4} = 1$$

II) A cada par ordenado $(e^x; e^y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, corresponde um único par ordenado $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

III) A equação obtida no item (I), nas variáveis e^x e e^y, representa um ramo de elipse, com centro no ponto (2; 3) semieixo maior 3, semieixo menor 2 e ambos paralelos aos respectivos eixos cartesianos.



IV) A expressão dada representa um conjunto com um número infinito de pontos.

Com respeito à equação polinomial
$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

a) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

b) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

c) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não nula.

d) não é divisível por $2x - 1$.

e) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Resolução

Seja $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

Como P(1) = 0, então x = 1 e raiz da equação

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -3 & 6 & -2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -4 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \,.\, (2x^3 - x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \,.\, (x^2 - 2) \,.\, (2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Dessa forma uma única raiz $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais $(x = \sqrt{2})$ está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sejam m e n inteiros tais que $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio r = 1 cm e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

a) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$

Resolução

$36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0 \Leftrightarrow$

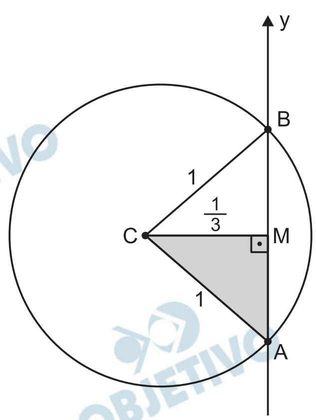
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{m}{36} \cdot x + \dfrac{n}{36} \cdot y - \dfrac{23}{36} = 0$, **representa uma circunferência cujo centro é** $C\left(\dfrac{-m}{72}; \dfrac{-n}{72}\right)$, **e sendo o raio igual a 1, temos:**

$$\sqrt{\dfrac{m^2}{72^2} + \dfrac{n^2}{72^2} + \dfrac{23}{36}} = 1 \Leftrightarrow m^2 + n^2 = \dfrac{13}{36} \cdot 72^2$$

Para $n = -\dfrac{3}{2}m$, **resulta** $m^2 + \left(-\dfrac{3}{2} \cdot m\right)^2 = \dfrac{13}{36} \cdot 72^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 24$ **e** $n = -36$, **pois o centro se localiza no 2º quadrante, portanto, o centro é** $C\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$

Se A e B são os pontos onde a circunferência de raio 1 cruza o eixo Oy, podemos (a partir do gráfico a seguir) obter a medida de AM (sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$**).**



Assim:

$$AM^2 + (1/3)^2 = 1^2 \Rightarrow AM = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, AB = $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ e a área do triângulo ABC, em

cm^2, é $\dfrac{\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$

14 C

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\dfrac{23}{11}\pi$. b) $\dfrac{16}{6}\pi$. c) $\dfrac{24}{11}\pi$.

d) $\dfrac{25}{11}\pi$. e) $\dfrac{7}{3}\pi$.

Resolução

Lembrando que, para cada 2π radianos de giro do ponteiro dos minutos, o ponteiro das horas gira $\dfrac{\pi}{6}$ radianos, temos:

Enquanto o ponteiro das horas girou x radianos, o ponteiro dos minutos girou $(2\pi + x)$ radianos, de modo que

$$\frac{(2\pi + x)}{x} = \frac{2\pi}{\dfrac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \frac{2\pi + x}{x} = 12 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{11}$$

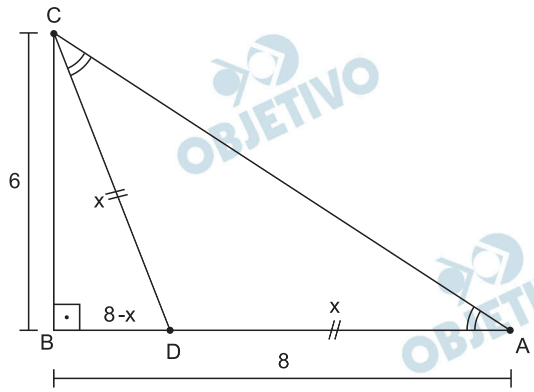
Desta forma, o ponteiro dos minutos varreu um ângulo, em radianos, de $2\pi + \dfrac{2\pi}{11} = \dfrac{24\pi}{11}$

15 D

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{15}{6}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{25}{4}$ e) $\frac{25}{2}$

Resolução



Sendo x = AD = CD, no triângulo retângulo BCD, de acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$(CD)^2 = (BC)^2 + (BD)^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + (8 - x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{25}{4}$

Portanto: $AD = \frac{25}{4}$ **cm**

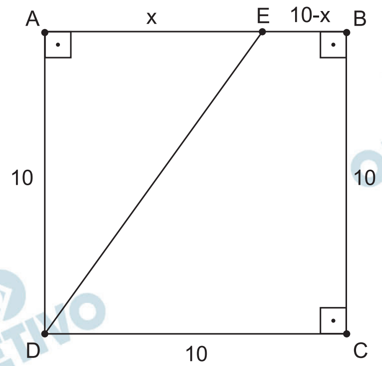
16 C

Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

a) $\dfrac{10}{3}$. b) 5. c) $\dfrac{20}{3}$. d) $\dfrac{25}{3}$. e) 10.

Resolução

Como o soma das três áreas é igual a 200 cm^2, podemos então concluir que a área do quadrado ABCD é igual a 100 cm^2 e que portanto cada um dos seus lados mede 10 cm.



Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética, podemos então concluir que a área do trapézio é igual a média aritmética entre a área do triângulo e a área do quadrado.

Assim, sendo x = AE, temos:

$$\frac{[10 + (10 - x] \,.\, 10}{2} = \frac{\dfrac{10 \,.\, x}{2} + 100}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200 - 10x = 5x + 100 \Leftrightarrow 15x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$$

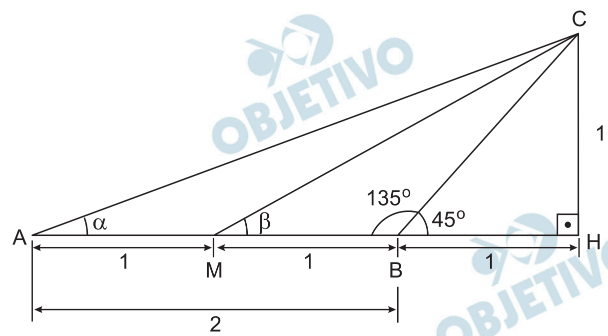
Portanto: $AE = \dfrac{20}{3}$ **cm**

Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135° e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em radianos, é igual a

a) $\dfrac{1}{5}\pi$. b) $\dfrac{1}{4}\pi$. c) $\dfrac{1}{3}\pi$. d) $\dfrac{3}{8}\pi$. e) $\dfrac{2}{5}\pi$.

Resolução

A partir do enunciado, temos a seguinte figura:



I) O triângulo BHC é retângulo e isósceles, então BH = HC = 1 cm

II) No triângulo MHC, $\text{tg}\,\beta = \dfrac{HC}{MH} = \dfrac{1}{2}$

III) No triângulo AHC, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{1}{3}$

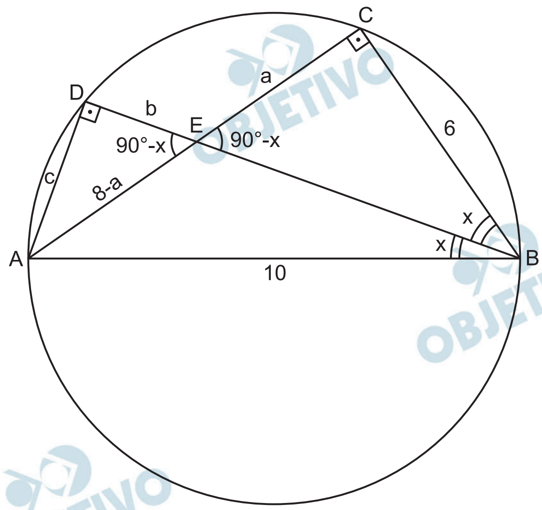
Como $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\beta} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{2} \,.\, \dfrac{1}{3}} = 1$

conclui-se que $\alpha + \beta = B\hat{A}C + B\hat{M}C = \dfrac{\pi}{4}$ **(pois α e β são agudos)**

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a

a) 14. b) 15. c) 16. d) 17. e) 18.

Resolução



I) No triângulo ABC, de acordo com o teorema da bissetriz do ângulo interno, temos:

$$\frac{10}{8-a} = \frac{6}{a} \Leftrightarrow a = 3$$

II) Como o triângulo ABC é retângulo, temos:

$$\cos(2x) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ e portanto}$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\,\text{sen}^2x \Rightarrow \frac{3}{5} = 1 - 2\,\text{sen}^2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,x = \frac{\sqrt{5}}{5}\text{, pois x é ângulo agudo.}$$

III) No triângulo retângulo ADE, temos:

$$\cos(90° - x) = \frac{b}{AE} \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{b}{8-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{b}{5} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

IV) Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADE, temos:

$$c^2 + b^2 = (8-a)^2 \Rightarrow c^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

V) Sendo S_1 e S_2 as áreas dos triângulos ADE e BCE, respectivamente, temos:

$$\alpha - 2\beta = S_1 + S_2 = \frac{b\,.\,c}{2} + \frac{a\,.\,6}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{5}}{2} + \frac{3\,.\,6}{2} = 14\text{ cm}^2$$

E

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$.   b) $\frac{13}{3}$.   c) $\frac{15}{4}$.

d) $2\sqrt{3}$.   e) $\frac{10}{3}$.

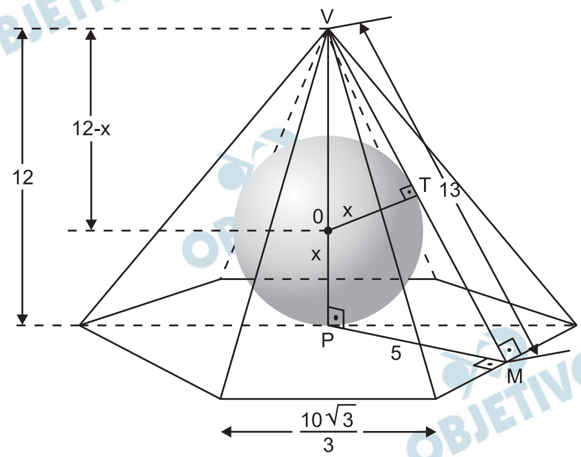
Resolução

I) O apótema $\overline{PM}$ da base dessa pirâmide, em centímetros, mede:

$$\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$$

II) O apótema $\overline{VM}$ da pirâmide, em centímetros, mede:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$



III) Da semelhança entre os triângulos retângulos TOV e PMV, temos:

$$\frac{OT}{PM} = \frac{VO}{VM}$$

Assim, sendo x o raio da esfera, em centímetros, temos finalmente:

$$\frac{x}{5} = \frac{12 - x}{13} \Leftrightarrow 18x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $\alpha = 120°$.

II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30°, 45°, 50°, 50° e 170°.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880°.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II. b) IV. c) II e IV.

d) I, II e IV. e) II, III e IV.

Resolução

I) A afirmação I é falsa, pois a soma das faces de um triedro é sempre menor que 360°.

II) A afirmação II é correta, pois:

$30° + 45° + 50° + 50° + 170° < 360°$ e

$170° < 30° + 45° + 50° + 50°$

III) A afirmação III é falsa, pois um poliedro convexo que tem 7 faces, sendo 3 triangulares, 1 quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais, tem

$$\frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2} = 15$$ **arestas e, portanto,**

o seu número "x" de vértices deve satisfazer a Relação de Eüler, ou seja: $x - 15 + 7 = 2 \Leftrightarrow x = 10$

IV) A soma das medidas dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é igual a $(10 - 2) \cdot 360° = 2880°$.

Assim, interpretando a expressão "soma das medidas de todas as faces" como "soma das medidas dos ângulos de todas as faces", podemos concluir que a afirmação IV é correta.

Portanto, são corretas apenas as afirmações II e IV.

As questões dissertativas, numeradas de **21** a **30**, devem ser resolvidas no caderno de soluções

21

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não vazios, tais que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A$.

Resolução

Lembrando que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) - (A \cap B)$, temos:

I) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \Leftrightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(A \cup B) - (A \cap B)] \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A \cup B = A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

II) No entanto, se $B \subset A$, temos $A \cap B = B$, $B \backslash A = \emptyset$
$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \backslash B) \cup \emptyset = A \backslash B$ **e**
$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \Leftrightarrow A \backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B = \emptyset$, **contrariando o enunciado.**

Resposta: Não existem conjuntos A e B satisfazendo as condições dadas.

22

Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, ..., n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

Resolução

I) Se $n \geq 3$, ímpar e $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ as raízes da equação $z^n = 1 = \cos 0° + i \,.\, \text{sen}\, 0°$ então:

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, 0\right) + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, 0\right) = 1$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, 1\right) + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, 1\right)$$

$$\vdots$$

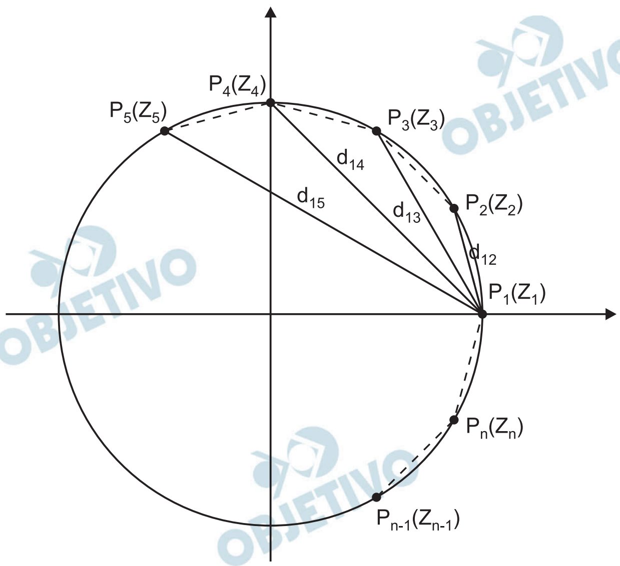
$$z_{k+1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, k\right) + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n} \,.\, k\right)$$

$$\vdots$$

$$z_n = \cos\left[\frac{2\pi}{n} (n-1)\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{n} \,.\, (n-1)\right]$$

II) Estas *n* soluções, representadas no plano complexo, são pontos de uma circunferência de raio *1* e dividem esta circunferência em *n* partes iguais determinando um polígono regular de *n* lados.

III) Se z_i e z_j forem duas quaisquer dessas soluções então $|z_i - z_j|^2$ é a distância entre os afixos de z_i e z_j.



IV) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_4| = \ldots = d_{12}$

V) $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_4| = |z_3 - z_5| = \ldots = d_{13}$

VI) $|z_1 - z_4| = |z_1 - z_5| = \ldots = d_{14}$

VII) $|z_1 - z_5| = |z_2 - z_6| = \ldots = d_{15}$

$\vdots$

VIII) Do ponto P_1 saem $\dfrac{n-3}{2}$ diagonais de *tamanhos diferentes* e o lado P_1P_2 do polígono de medida d_{12}

IX) O número total de valores distinto de $|z_i - z_j|$ é $\dfrac{n-3}{2} + 1 = \dfrac{n-1}{2}$

23

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Resolução

Os 11 livros podem ser empilhados de 11! maneiras diferentes sobre a mesa.

Desses casos, estarão juntos aqueles que tratam de um mesmo assunto num total de 5! 4! 2! 3!.

A probabilidade pedida é, pois $p = \dfrac{5!\,4!\,2!\,3!}{11!} =$

$$= \frac{5!\,24 \,.\, 2 \,.\, 6}{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5!} = \frac{1}{1155}$$

Resposta: $\dfrac{1}{1155}$

24

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/5}(x^2 - x + 19)}$.

Resolução

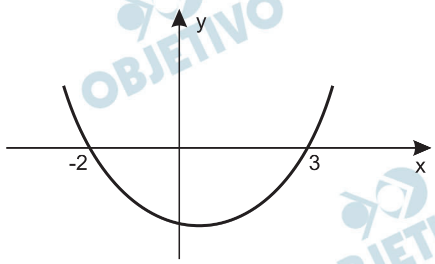
$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/5}(x^2 - x + 19)} \Leftrightarrow 4^{-\log_{1/5}(x^2 - x + 19)} > 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19) > 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19) < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 19 > 25 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 3$$

Obs.:

1) O gráfico de $f(x) = x^2 - x - 6$ é do tipo



2) $x^2 - x + 19 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

25

Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

Resolução

Sejam $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ **e** $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Se $M . N = N . M, \forall N \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, então:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy = ax + bz & \text{(I)} \\ bx + dy = ay + bw & \text{(II)} \\ az + cw = cx + dz & \text{(III)} \\ bz + dw = cy + dw & \text{(IV)} \end{cases}$$

Das equações (I) e (IV), temos $cy = bz$, que só é verdadeira para quaisquer b e c se, e somente se, $y = z = 0$. Substituindo nas equações (II) e (III), temos $bx = bw$ e $cw = cx$, que só são verdadeiras para quaisquer b e c se, e somente se, $x = w$.

Assim, as matrizes M que satisfazem as condições dadas são do tipo $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \forall x$.

Resposta: $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \forall x$

26

Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 - m)\,x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Resolução

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ terá duas raízes reais distintas e maiores que zero se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, $P = \dfrac{c}{a} > 0$ e $S = \dfrac{-b}{a} > 0$.

Para a equação dada, devemos ter

I) $(2m)^2 - 4\,(2 - m)\,(2 + m) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4m^2 - 4\,(4 - m^2) > 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m < -\sqrt{2}$ **ou** $m > \sqrt{2}$

II) $\dfrac{m+2}{2-m} > 0 \Leftrightarrow (m + 2)\,(2 - m) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

III) $\dfrac{-2m}{2-m} > 0 \Leftrightarrow -2m\,(2 - m) > 0 \Leftrightarrow m < 0$ **ou** $m > 2$

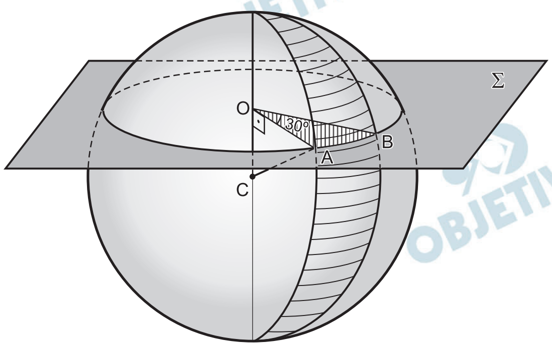
De (I), (II) e (III), concluímos que $-2 < m < -\sqrt{2}$.

Resposta: $-2 < m < -\sqrt{2}$

27

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

Resolução



No triângulo retângulo AOC, temos CA= r = 6cm, CO = 2cm e $(AO)^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow AO = 4\sqrt{2}$ **cm**

A intersecção de Σ com Ω é o setor circular AOB de 30° cujo raio mede $4\sqrt{2}$ cm.

Assim, sendo S, em cm^2, a área do setor AOB, temos:

$$S = \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 = \frac{8\pi}{3}$$

Resposta: $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^2

a) Calcule

$$\left(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \text{sen}^2 \frac{\pi}{5}\right)\cos \frac{\pi}{10} - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10}.$$

b) Usando o resultado do item anterior, calcule

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}.$$

Resolução

a) $$\left(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \text{sen}^2 \frac{\pi}{5}\right).\cos \frac{\pi}{10} - 2.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}.\text{sen}\,\frac{\pi}{10} =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) . \cos\frac{\pi}{10} - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) . \ \text{sen}\,\frac{\pi}{10} =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

b) Usando o resultado do item anterior, temos:

$$\left(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \text{sen}^2 \frac{\pi}{5}\right).\cos \frac{\pi}{10} =$$

$$= 2\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).\cos\frac{\pi}{10}}{2\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{10}\,.\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).\cos\frac{\pi}{10}}{4\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10}\,.\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{4\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10}}$$

Notando que $\left(\frac{\pi}{10}\right)$ e $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ são complementares, temos

$\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$ e, portanto, resulta:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

Respostas: a) 0 b) $\frac{1}{4}$

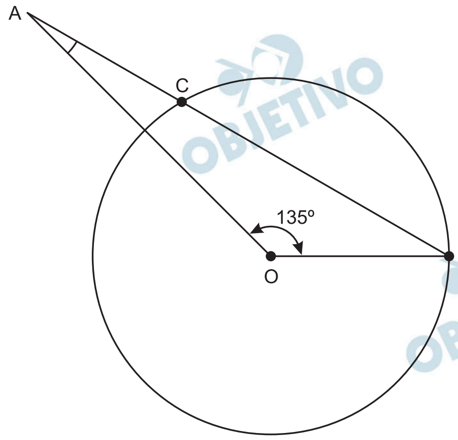
Num triângulo AOB o ângulo $A\hat{O}B$ mede 135° e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto C (≠ B).

a) Mostre que $O\hat{A}B$ mede 15°.

b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

Resolução

a)



I) Sendo AB = $\sqrt{2}$ cm, OB = $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm e aplicando a lei dos senos no ΔAOB, temos:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen } 135°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ (I)}$$

Obs.: $\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

com $C = A^2 - B$

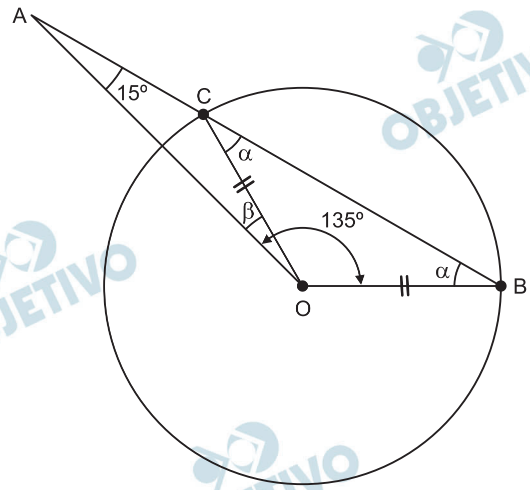
II) sen 15° = sen (60° – 45°) =

= sen 60° . cos 45° – sen 45° . cos 60° =

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ (II)}$$

De (I) e (II), temos: sen $\hat{A}$ = sen 15° ⇒ $\hat{A}$ = 15°, pois $\hat{A}$ é agudo. Portanto, o ângulo $O\hat{A}B$ mede 15°.

b)



O triângulo OBC é isósceles, pois

OB = OC = $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (raio)

Assim, sendo α a medida dos ângulos congruentes $O\hat{B}C$ e $O\hat{C}B$ e β a medida do ângulo $A\hat{O}C$, temos:

I) $15° + 135° + \alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 30°$

II) $\alpha = 15° + \beta$, pois α é ângulo externo ao triângulo CAO

Assim: $30° = 15° + \beta \Leftrightarrow \beta = 15° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\hat{A}O \cong C\hat{O}A \Leftrightarrow \Delta CAO$ é isósceles com base $\overline{AO} \Leftrightarrow AC = OC$

Portanto: AC = $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Respostas: a) demonstração b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

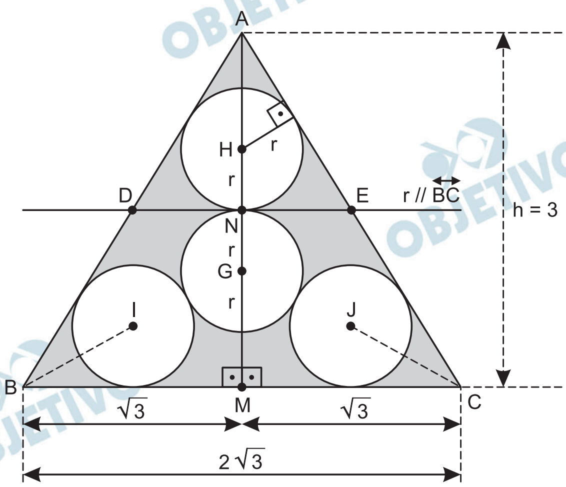
Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}$ cm. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de r.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

Resolução



a) I) A altura h, em centímetros, do triângulo equilátero ABC é tal que $h = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$

II) G é o baricentro do triângulo equilátero ABC. Assim: $AG = \dfrac{2}{3} \cdot h = \dfrac{2}{3} \cdot 3 = 2$

III) H é o baricentro do triângulo equilátero ADE. Assim: $AH = 2 \cdot HN \Leftrightarrow AH = 2r$

IV) $AH + HN + NG = AG$

Assim: $2r + r + r = 2 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

b) A área S, em centímetros quadrados, da região interna ao triângulo ABC não preenchida pelos círculos é dada por:

$$S = \frac{BC \cdot h}{2} - 4\pi r^2$$

Assim: $S = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} - 4 \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow S = 3\sqrt{3} - \pi$

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, a distância do centro ao vértice mais próximo é dada por: $d = AH = IB = JC = 2r$

Assim: $d = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d = 1$

Respostas: a) $\dfrac{1}{2}$ cm b) $3\sqrt{3} - \pi$ cm^2 c) 1 cm