MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
$A \backslash B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k,\ k \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
det A: determinante da matriz A
A^t: transposta da matriz A
A^{-1}: inversa da matriz inversível A
P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
n(A): número de elementos do conjunto finito A
Arg z : argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Arg $z \in [0, 2\pi[$
f o g: função composta das funções f e g
f . g: produto das funções f e g

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 E

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas I e III. e) nenhuma.

Resolução

As demonstrações são imediatas para os casos em que um dos conjuntos, A, B ou C, for vazio. As demonstrações seguintes são para os casos em que nenhum deles é vazio.

I. *Verdadeira*, pois $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$
A negação de ($x \in A$ e $x \in B$) é ($x \notin A$ ou $x \notin B$).

II. *Verdadeira*, pois para qualquer elemento x:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

III. *Verdadeira*, pois

$$x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \text{ ou } x \in (B \backslash A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B) \\ \text{ou} \\ x \in B \text{ e } x \notin A \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

2 C

Considere conjuntos A, B $\subset \mathbb{R}$ e C $\subset$ (A$\cup$B). Se A$\cup$B, A$\cap$C e B$\cap$C são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\dfrac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

a) $C =]\sqrt{\pi}, 5[$. b) $C = [2, \pi]$. c) $C = [2, 5[$.
d) $C = [\pi, 4]$. e) C não é intervalo.

Resolução

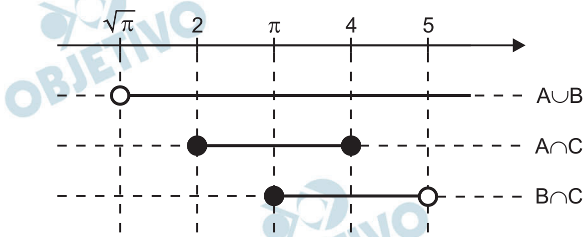
Considerando que A, B $\in \mathbb{R}$ e C $\subset$ (A $\cup$ B), temos:

1) De $\ell n\,(x - \sqrt{\pi})$, tem-se $x - \sqrt{\pi} > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > \sqrt{\pi}$ e, portanto, $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{\pi}\}$

2) De $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$, tem-se $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ e, portanto, $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

3) De $\sqrt{\dfrac{x - \pi}{5 - x}}$, tem-se $\dfrac{x - \pi}{5 - x} \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - \pi) \,.\, (5 - x) \geq 0$ e $x \neq 5 \Leftrightarrow \pi \leq x < 5$ e, portanto, $B \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x < 5\}$

Agora, observe o seguinte diagrama:



Desse diagrama, conclui-se que $[2; 5[\ \subset$ C. Se $\forall x \in [\sqrt{\pi}; 2[\ \cup\ [5; +\infty[$ pertencesse a C, este valor de x pertenceria a $A \cap C$ ou a $B \cap C$, o que não ocorre. Assim sendo, $C = [2; 5[$

Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \overline{z} + |z|^2 = -\left[(\sqrt{2} + i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\,\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que

a) $i(z - \overline{z}) < 0$.   b) $i(z - \overline{z}) > 0$.   c) $|z| \in [5, 6]$.

d) $|z| \in [6, 7]$.   e) $\left|z + \frac{1}{\overline{z}}\right| > 8$.

Resolução

1) $$(\sqrt{2} + i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - \frac{\sqrt{2}+1}{3}i\right) =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{3} - \frac{2+\sqrt{2}}{3}\,i + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\,i + \frac{\sqrt{2}+1}{3} =$$

$$= \frac{3}{3} - \frac{3}{3}\,i = 1 - i$$

2) $(1 - i)^{12} = (-2i)^6 = 64 \,.\, i^6 = 64 \,.\, i^2 = -64$

3) **Se** $z = x + yi$, **com** $x, y \in \mathbb{R}$, **então**
$x + yi - x + yi + x^2 + y^2 = 64 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) + 2yi = 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64$ **e** $2y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 8$ **e** $y = 0$

4) **Os valores de z que satisfazem a equação são 8 e – 8**

5) **Se** $z = 8$, **então** $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|8 + \frac{1}{8}\right| > 8$

6) **Se** $z = -8$, **então** $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|-8 - \frac{1}{8}\right| > 8$

Os argumentos principais das soluções da equação em z,

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0,$$

pertencem a

a) $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$. b) $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[$.

c) $\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. d) $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right[$.

e) $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

Resolução

$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0$

Se z = a + bi, tem-se:

$i(a + bi) + 3(a - bi) + (a + bi + a - bi)^2 - i = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ai - b + 3a - 3bi + 4a^2 - i = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4a^2 + 3a - b) + (a - 3b - 1)i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 3a - b = 0 \text{ (I)} \\ \quad e \\ a - 3b - 1 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II), tem-se: $b = \dfrac{a - 1}{3}$ **(III)**

De (I) e (III), tem-se:

$12a^2 + 8a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$ **ou** $a = -\dfrac{1}{6}$

Portanto:

1) $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

cujo argumento é $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

2) $a = -\dfrac{1}{6} \Rightarrow b = -\dfrac{7}{18} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{18}i$

cujo argumento pertence ao intervalo $\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

De (1) e (2), conclui-se que os argumentos principais das soluções da equação pertencem ao intervalo

$\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_{50})$ de razão d.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3. b) 6. c) 9. d) 11. e) 14.

Resolução

1) **Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ for uma progressão aritmética de razão d, então $a_{10} = a_1 + 9d$ e $a_{50} = a_1 + 49d$**

2) $$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \,.\, 10 = 10 + 25d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 9d = 2 + 5d \Leftrightarrow 2a_1 + 4d = 2$$

3) $$\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550 \Rightarrow \frac{a_1 + a_1 + 49d}{2} \,.\, 50 = 4550 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 49d = 182$$

4) **De (2) e (3), temos:**

$$\begin{cases} 2a_1 + 49d = 182 \\ 2a_1 + 4d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = -7 \end{cases} \Rightarrow d - a_1 = 11$$

Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. f . g é ímpar,

II. f o g é par,

III. g o f é ímpar,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas I e II. e) todas.

Resolução

$f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$, pois f e g são respectivamente funções par e ímpar.

I. *Verdadeira*.

$$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f \cdot g \text{ é ímpar.}$$

II. *Verdadeira*.

$$(fog)(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)] = f[g(x)] = (fog)(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow fog \text{ é par.}$$

III. *Falsa*.

$$(gof)(-x) = g[f(-x)] = g[f(x)] = (gof)(x) \Leftrightarrow gof \text{ é par.}$$

A equação em x,

$$\text{arctg}\,(e^x + 2) - \text{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução.

Resolução

Com $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \pi$, temos:

1) $a = \text{arc tg}\,(e^x + 2) \Leftrightarrow \text{tg}\,a = e^x + 2$

2) $b = \text{arc cotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) \Leftrightarrow \text{cotg}\,b = \frac{e^x}{e^{2x}-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,b = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$

3) $a - b = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{tg}\,(a-b) = \text{tg}\,(\pi/4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,a - \text{tg}\,b = 1 + \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b$

Se, na equação:

$$(e^x + 2) - \left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right) = 1 + (e^x + 2)\,.\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)$$

fizermos $e^x = y$, resulta:

$$(y + 2) - \left(\frac{y^2-1}{y}\right) = 1 + (y+2)\,.\left(\frac{y^2-1}{y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - y^2 + 1 = y + y^3 - y + 2y^2 - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^3 + 2y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)\,.\,(y^2 + y - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ ou } y = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Como $y > 0$, a única possibilidade e
$$y = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Portanto:
$$e^x = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \Leftrightarrow x = \log_e\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) > 0$$

Dessa forma, a equação admite uma única solução, e esta é positiva.

Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$.

Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro das raízes são imaginárias puras.

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.

III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e III. e) II e III.

Resolução

1) $-i$ **é raiz** $\Rightarrow +i$ **é raiz** $\Rightarrow$

$\Rightarrow p(i) = i^5 - a \,.\, i^3 + a \,.\, i^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

2) $a = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1) = (x^2 + 1).(x - 1)\,.\,(x^2 + x + 1)$

3) $p(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ **ou** $x - 1 = 0$ **ou** $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = +i$ **ou** $x = -i$ **ou** $x = 1$ **ou**

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \text{ ou } x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

Portanto, I) F ; II) F e III) V

Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}.$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que p(l) é igual a

a) – 4. b) – 2. c) 2. d) 4. e) 6.

Resolução

1) $$\begin{cases} \mathbf{a + 2b + 5c = 0} \\ \mathbf{a + 4b + 2c = 6} \\ \mathbf{2a + 2b + 2c = 5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a + 2b + 5c = 0} \\ \mathbf{2b - 3c = 6} \\ \mathbf{-11c = 11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = \dfrac{3}{2}} \\ \mathbf{c = -1} \end{cases}$$

2) **As raízes de $\mathbf{p(x) = 0}$ são $\mathbf{r_1 = 2, r_2 = \dfrac{3}{2}, r_3 = \dfrac{3}{2}}$, $\mathbf{r_4 = -1, r_5 = -1}$**

3) $$\mathbf{p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n, \text{ com } a_5 = 4 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow p(x) = 4(x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 . (x + 1)^2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow p(1) = 4(1 - 2) . \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 . (1 + 1)^2 = -4}$$

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, $n = 1, 2, ..., 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1, 1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução

Observemos que:

$a_0 = -1$

$a_1 = 1 + i \,.\, a_0 = 1 - i$

$a_2 = 1 + i \,.\, a_1 = 1 + i \,.\, (1 - i) = 2 + i$

$a_3 = 1 + i \,.\, a_2 = 1 + i \,.\, (2 + i) = 2i$

$a_4 = 1 + i \,.\, a_3 = 1 + i \,.\, (2i) = -1$

$\vdots$

desta forma, a_n é igual a -1, $(1 - i)$, $(2 + i)$ ou $2i$, conforme n seja do tipo $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ ou $4k + 3$, com $n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

I) ***Falsa*, pois**

$$p(-1) = \sum_{n=0}^{15} a_n(-1)^n = a_0 - a_1 + a_2 -$$

$$- a_3 + a_4 - \ldots - a_{15} = [-1 - (1 - i) + (2 + i) - 2i] +$$

$$+ [-1 - (1 - i) + (2 + i) - 2i] + \ldots +$$

$$+ [-1 - (1 - i) + (2 + i) - 2i] = 0 \in \mathbb{R}$$

II) ***Verdadeira***

Observe que $x \in [-1; 1] \Rightarrow x^n \in [-1; 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^n| \leq 1 \Leftrightarrow |a_n| \,.\, |x^n| \leq |a_n|$ **e**

$$|p(x)| = \left| \sum_{n=0}^{15} a_n x^n \right| =$$

$$= |a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_{15}x^{15}| \leq$$

$$\leq |a_0x^0| + |a_1x^1| + |a_2x^2| + \ldots + |a_{15}x^{15}| =$$

$$= |a_0|.|x^0| + |a_1|.|x^1| + |a_2|.|x^2| + \ldots + |a_{15}|.|x^{15}| \leq$$

$$\leq |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{15}| =$$

$$= 4(|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3|) = 4 \,.\, (1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2) =$$

$= 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, **pois** $|a_0| = |-1| = 1$,

$|a_1| = |1 - i| = \sqrt{2}$, $|a_2| = |2 + i| = \sqrt{5}$, $|a_3| = |2i| = 2$

III) ***Verdadeira*, pois**

$$a_8 = 1 + ia_7 = 1 + i \,.\, (1 + ia_6) = 1 + i - a_6 =$$

$$= 1 + i - (1 + ia_5) = i - i(1 + ia_4) = a_4$$

11 B

A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$. b) $2690\sqrt{5}$. c) $2712\sqrt{5}$.

d) $1584\sqrt{15}$. e) $1604\sqrt{15}$.

Resolução

1) $$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5 = \left(2\sqrt{3}\right)^5 + 5.\left(2\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{5} + 10.\left(2\sqrt{3}\right)^3.\left(\sqrt{5}\right)^2 + 10.\left(2\sqrt{3}\right)^2.\left(\sqrt{5}\right)^3 + 5.\left(2\sqrt{3}\right)^1.\left(\sqrt{5}\right)^4 + \left(\sqrt{5}\right)^5$$

2) $$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5 = \left(2\sqrt{3}\right)^5 - 5.\left(2\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{5} + 10.\left(2\sqrt{3}\right)^3.\left(\sqrt{5}\right)^2 - 10.\left(2\sqrt{3}\right)^2.\left(\sqrt{5}\right)^3 + 5.\left(2\sqrt{3}\right)^1.\left(\sqrt{5}\right)^4 - \left(\sqrt{5}\right)^5$$

3) $$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5 - \left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5 = 2\left[5.\left(2\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{5} + 10.\left(2\sqrt{3}\right)^2.\left(\sqrt{5}\right)^3 + \left(\sqrt{5}\right)^5\right] = 2.\left[720\sqrt{5} + 600\sqrt{5} + 25\sqrt{5}\right] = 2690\sqrt{5}$$

12 A

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso.

Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

a) $\frac{16}{27}$. b) $\frac{49}{81}$. c) $\frac{151}{243}$.

d) $\frac{479}{729}$. e) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

Resolução

Se a probabilidade de um refletor ser aceso é $\frac{2}{3}$, a de não ser aceso é $\frac{1}{3}$.

Assim sendo, a probabilidade pedida é:

$$C_{6,4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_{6,5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 =$$

$$= \frac{80}{243} + \frac{64}{243} = \frac{144}{243} = \frac{16}{27}$$

13 D

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, det $A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\dfrac{a_1}{d}$ é igual a

a) – 4. b) – 3. c) – 2. d) – 1. e) 1.

Resolução

1) $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} = a_1 \,.\, a_4 \,.\, a_6 = -1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \,.\, 10 \,.\, (a_1 + 5d) = -1000 \Leftrightarrow a_1 \,.\, (a_1 + 5d) = -100$

2) $a_4 = a_1 + 3d = 10 \Leftrightarrow a_1 = 10 - 3d$

3) $(10 - 3d)(10 - 3d + 5d) = -100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3d^2 + 5d - 100 = 0 \Leftrightarrow d = \dfrac{-5 \pm 35}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = 5$, pois $d > 0$

4) $a_1 = 10 - 3d = 10 - 3 \,.\, 5 = -5$

5) Se $a_1 = -5$ e $d = 5$, então $\dfrac{a_1}{d} = -1$

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente, Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\dfrac{1}{72}$ e 12.

b) $-\dfrac{1}{72}$ e -12.

c) $-\dfrac{1}{72}$ e 12.

d) $-\dfrac{1}{72}$ e $\dfrac{1}{12}$.

e) $\dfrac{1}{72}$ e $\dfrac{1}{12}$.

Resolução

1) (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma progressão geométrica de razão 3 e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$
Logo: $x_1 + 3x_1 + 9x_1 + 27x_1 = 80 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 6, 18, 54)$

2) (y_1, y_2, y_3, y_4) é uma progressão geométrica de razão 4 e $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 255$
Logo: $y_1 + 4y_1 + 16y_1 + 64y_1 = 255 \Leftrightarrow y_1 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) = (3, 12, 48, 192)$

3) $$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \,.\, (-1)^5 \,.\, \begin{vmatrix} 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \,.\, (-1) \,.\, 1 \,.\, (-1)^6 \,.\, \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 48 \end{vmatrix} = -(288 - 216) = -72$$

4) $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{72}$$

5) **Interpretando "o elemento $(A^{-1})_{23}$" como sendo "o elemento b_{23} da matriz inversa de A", temos:**

$$b_{23} = \frac{\text{cofator do elemento } a_{32} \text{ de A}}{\text{det A}} =$$

$$= \frac{(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-72} =$$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} 18 & 54 \\ 48 & 192 \end{vmatrix}}{-72} = \frac{-864}{-72} = 12$$

O valor da soma $\sum\limits_{n=1}^{6} \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$.

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

c) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

e) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

Resolução

Lembrando que cos (a + b) – cos (a – b) = = –2 sen a . sen b, temos:

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{3^n} + \frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{2\alpha}{3^n} - \frac{\alpha}{3^n}\right) =$$

$$= -2\,\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) . \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) . \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) . \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{3^n}\right)\right] \Leftrightarrow$$

Desta forma:

$$\sum_{n=1}^{6} \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) . \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{3^n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)} - \cos\alpha + \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{9}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)} + \right.$$

$$+ \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{27}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{9}\right)} + \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{81}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{27}\right)} +$$

$$\left. + \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{81}\right)} + \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$$

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \dfrac{4\pi}{3}$, $0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma sen α + sen β, então α é igual a

a) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$. b) $\dfrac{2\pi}{3}$. c) $\dfrac{3\pi}{5}$. d) $\dfrac{5\pi}{8}$. e) $\dfrac{7\pi}{12}$.

Resolução

1) $\left.\begin{array}{r}\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\\ \alpha+\beta = \dfrac{4\pi}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \sqrt{3}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= \sqrt{3}\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

2) $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \sqrt{3}\,.\cos\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ **é máximo para**

$$\alpha - \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

17 **A**

Considere as circunferências C_1: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e C_2: $(x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e C_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

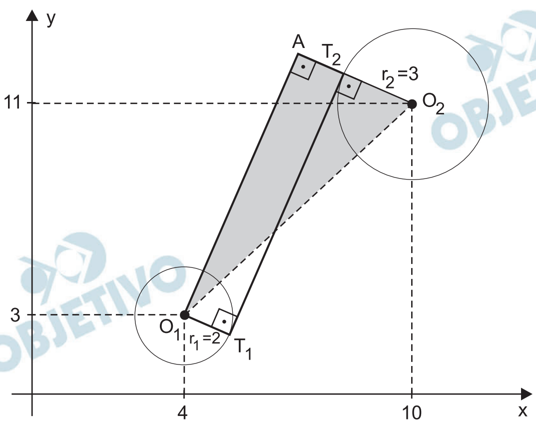
a) $5\sqrt{3}$. b) $4\sqrt{5}$. c) $3\sqrt{6}$. d) $\dfrac{25}{3}$. e) 9.

Resolução

As circunferências C_1: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e C_2: $(x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$ têm centro e raio, respectivamente:

$O_1\,(4, 3)$, $r_1 = 2$ e $O_2\,(10, 11)$, $r_2 = 3$.

A partir do enunciado, temos o seguinte gráfico, com:



1) $O_1O_2 = \sqrt{(10-4)^2 + (11-3)^2} = 10$

2) $O_1T_1 = r_1 = 2$

3) $O_2T_2 = r_2 = 3$

4) T_1T_2 é a distância entre os pontos de tangência.

Considerando o triângulo O_1AO_2 retângulo em A, temos:

$AO_1^2 + AO_2^2 = O_1O_2^2$ (Teorema de Pitágoras)

Como $O_1O_2 = 10$, $AO_2 = r_1 + r_2 = 5$ e $O_1A = T_1T_2$, conclui-se que:

$T_1T_2^2 + 5^2 = 10^2 \Leftrightarrow T_1T_2^2 = 75 \Leftrightarrow T_1T_2 = 5\,.\sqrt{3}$

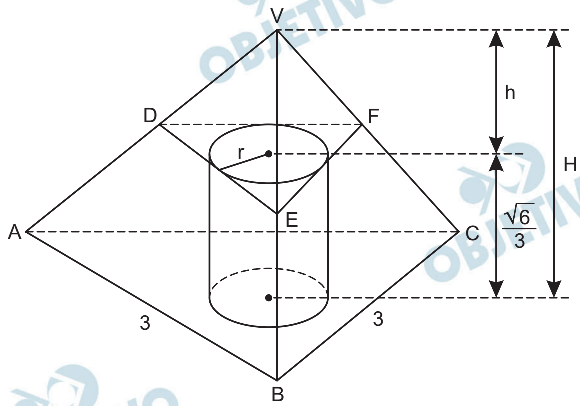
18 D

Um cilindro reto de altura $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$. b) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$. c) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{6}$.

d) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$. e) $\dfrac{\pi}{3}$.

Resolução



Sejam H e h as medidas, em centímetros, das alturas dos tetraedros regulares VABC e VDEF.
Assim:

$$H = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \text{ e } h = H - \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Sendo ℓ a medida, em centímetros, da aresta do tetraedro VDEF, temos:

$$h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \ell = 2$$

A medida r, em centímetros, do raio da base do cilindro é $\dfrac{1}{3}$ da altura do triângulo equilátero DEF.

$$\text{Assim, } r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o volume V do cilindro, em centímetros cúbicos, é:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}$$

19 E

Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo B = (2,1) e C = (5,5). Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$,

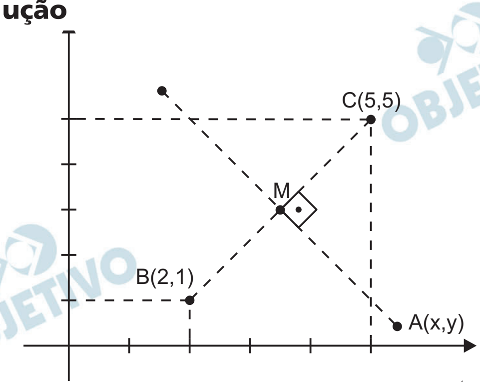
II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,

III. A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

Resolução



1) O ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M\left(\frac{7}{2}, 3\right)$

2) O ponto A pertence à mediatriz do segmento $\overline{BC}$ cuja equação é $y - 3 = -\frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow$

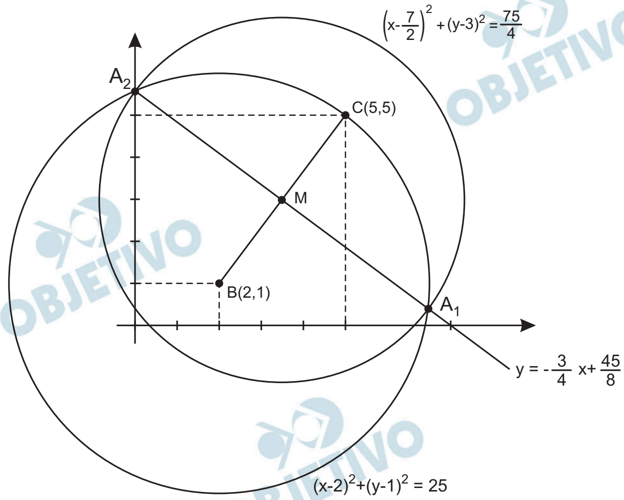
$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$

3) $d^2_{AB} = d^2_{BC} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

4) $d^2_{AM} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$

5) A está na intersecção da reta de equação $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência de equação $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ e a afirmação II, portanto, é verdadeira.

6) O ponto A também pertence à circunferência de equação $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$ e a afirmação III, pois, também é verdadeira.


$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{75}{4}$
A_2
C(5,5)
M
B(2,1)
A_1
$y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$
$(x-2)^2+(y-1)^2=25$

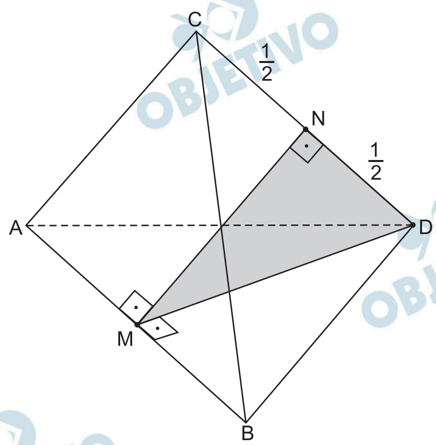
20 B

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. b) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. c) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Resolução



$\overline{DM}$ é altura do triângulo equilátero ABD, e portanto,

$$DM = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

No triângulo retângulo MND, temos:

$$(MN)^2 + (ND)^2 = (DM)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (MN)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

Assim, a área S do triângulo MND, em centímetros quadrados, é:

$$S = \frac{MN \cdot ND}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n(P(B \backslash C))$.

Resolução

Seja $n(C) = x$

1) $C \subset B \Leftrightarrow B \cap C = C \Rightarrow \boxed{n(B \cap C) = n(C) = x}$

2) $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n[B - (B \cap C)] = 3n(B \cap C) \Leftrightarrow n[B - C] =$
$= 3n(C) \Leftrightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) \Leftrightarrow$
$\boxed{n(B) = 4n(C) = 4x}$, pois $C \subset B$

3) Se $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica, então $[n(A)]^2 = n(C) \,.\, n(B) = x \,.\, 4x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{n(A) = 2x}$, pois $n(A) \geq 0$.

4) $3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow 3x = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(A \cap B) = \dfrac{x}{2}$

5) Desta forma,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$
$= 2x + 4x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{11x}{2} = 22 \Rightarrow x = 4$

Assim, $n(C) = x = 4$

e $n(P(B \backslash C)) = 2^{n(B \backslash C)} = 2^{3n(B \cap C)} = 2^{3 \,.\, x} =$
$= 2^{3 \,.\, 4} = 2^{12} = 4096$

Respostas: a) 4 b) 4096

22

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_I, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$ tem soma 8 e a progessão infinita $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$.

Resolução

Se $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ for uma progressão geométrica infinita de razão $r < 0$, então:

1) $(a_1, a_6, a_{11}, \dots)$ é uma progressão geométrica infinita de razão r^5 e, portanto:

$$\frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

2) $(a_5, a_{10}, a_{15}, \dots)$ é uma progressão geométrica infinita de primeiro termo $a_5 = a_1 \cdot r^4$ e razão r^5 e, portanto:

$$\frac{a_1 \cdot r^4}{1 - r^5} = 2$$

3) De (1) e (2), temos:

$$\frac{\dfrac{a_1}{1 - r^5}}{\dfrac{a_1 \cdot r^4}{1 - r^5}} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{r^4} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pois } r < 0$$

4) $\dfrac{a_1}{1 - r^5} = 8$ e $r = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, então

$$\frac{a_1}{1 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5} = 8 \Leftrightarrow a_1 = 8 + \sqrt{2}$$

5) A soma dos termos da progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é

$$\frac{8 + \sqrt{2}}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 14 - 6\sqrt{2}$$

Resposta: $14 - 6\sqrt{2}$

Analise se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1}.

Resolução

1) **Como a função g definida por $g(x) = 3^x$ é estritamente crescente, então $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2} \Rightarrow 3^{x_1} - 3^{x_2} < 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$**

2) **Como a função h definida por $f(x) = 3^{-x}$ é estritamente decrescente, então $x_1 < x_2 \Rightarrow 3^{-x_1} > 3^{-x_2} \Rightarrow 3^{-x_1} - 3^{-x_2} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -(3^{-x_1} - 3^{-x_2}) < 0, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$**

3) **A função f definida por $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é estritamente crescente, pois para todo x_1, x_2, tal que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$, pois**

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3^{x_1} - 3^{-x_1}}{2} - \frac{3^{x_2} - 3^{-x_2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}[(3^{x_1} - 3^{x_2}) - (3^{-x_1} - 3^{-x_2})] < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

4) **Se a função f é estritamente crescente, então ela é injetora.**

5) **$Im(f) = CD(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ f é sobrejetora.**

6) **Se f é injetora e sobrejetora, ela é bijetora.**

7) $$y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = 3^x - \frac{1}{3^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 2y\,(3^x) - 1 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log_3 (y + \sqrt{y^2 + 1})$$

8) **A função $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f^{-1}(x) = \log_3 (x + \sqrt{x^2 + 1})$**

Resposta: f é bijetora e
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$

24

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

Resolução

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$f(a) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ e $f(-a) = -b$

De $f(-a) = -b$, temos $f^{-1}(-b) = -a$

Assim:

$f^{-1}(-b) = -a = -f^{-1}(b)$ e, portanto, f^{-1} é ímpar.

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p, – r também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0 < 0$.

Resolução

1) $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + x^6$ tem coeficientes reais. Portanto, se $\alpha + \beta i$ é raiz, então $\alpha - \beta i$ é raiz com a mesma multiplicidade.

2) Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então $p(r_1) = 0$, $p(-r_1) = 0$, $p(r_2) = 0$, $p(-r_2) = 0$, $p(r_3) = 0$, $p(-r_3) = 0$.

3) Se $r_3 = \alpha + \beta i$ é raiz, então $\alpha - \beta i$ é raiz e se $-r_3 = -\alpha - \beta i$ é raiz, então $-\alpha + \beta i$ é raiz. Para que $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, $-\alpha - \beta i$, $-\alpha + \beta i$ representem apenas duas raízes, então $\alpha = 0$, necessariamente, e as raízes são βi, $-\beta i$.

**4) Considerando que se r é raiz de p, – r também é raiz de p, com a mesma multiplicidade, então se r é raiz dupla de p, então – r é raiz dupla de p.
Se $r = \alpha + \beta i$ é a raiz dupla, então $-r = -\alpha - \beta i$ é raiz dupla. Mas, se $\alpha + \beta i$ é raiz, então $\alpha - \beta i$ é raiz e se $\alpha - \beta i$ é raiz, então $-\alpha + \beta i$ é raiz. Para que $\alpha + \beta i$ (dupla), $-\alpha - \beta i$ (dupla), $\alpha - \beta i$ (dupla), $-\alpha + \beta i$ (dupla) representem apenas as 4 raízes, deve-se ter $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.**

**5) Considerando que se r é raiz de p, –r também é raiz de p, sem a mesma multiplicidade, então um polinômio p pode ter as seguintes raízes:
(1 + i) (dupla); (1 – i) (dupla); (–1 – i) (simples); (–1 + i) (simples)**

6) O produto das 6 raízes de p(x) = 0 é $+\dfrac{a_0}{1}$.

**Se $r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3$ e $-r_3$ são as 6 raízes, então
$a_0 = r_1(-r_1) \cdot r_2(-r_2) \cdot r_3 \cdot (-r_3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_0 = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3)^2$**

7) Se r_1, r_2 e r_3 são raízes reais, então $a_0 < 0$.

8) Se r_1 e r_2 são raízes reais e $r_3 = \gamma i$, então:

$a_0 = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3)^2 = -(r_1 \cdot r_2 \cdot \gamma i)^2 =$

$= -(r_1 \cdot r_2 \cdot \gamma)^2 \cdot i^2 \Rightarrow a_0 = (r_1 \cdot r_2 \cdot \gamma)^2 > 0$

Resposta: A afirmação (I) é verdadeira.
A afirmação (II) é falsa.
A afirmação (III) é falsa.

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

Resolução

1) Os múltiplos de 5 compreendidos entre 1 e 90, inclusive, são os termos da progressão aritmética (5; 10; 15; …; 90), num total de 18 termos.

2) Os múltiplos de 6 compreendidos entre 1 e 90, inclusive, são os termos da progressão aritmética (6; 12; 18; …; 90), num total de 15 termos.

3) Os múltiplos de 5 e 6 compreendidos entre 1 e 90 são 30, 60 e 90.

4) Os múltiplos de 5 ou 6 compreendidos entre 1 e 90 totalizam 18 + 15 – 3 = 30 números.

a) A probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou 6 é $\dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$

b) Dos 90 números da urna, 75 não são múltiplos de 6. A probabilidade da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6 é

$$\frac{15}{90} \cdot \frac{75}{89} + \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} = \frac{5}{6}$$

Respostas: a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{5}{6}$

Considere as matrizes $A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4x1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}; \; \text{e} \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix};$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial AX = B tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1\ 1\ 2\ 4]^t$, encontre X tal que AX = B.

Resolução

a) AX = B tem solução única ⇔ det A ≠ 0 ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (-2) \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4) \cdot a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

b) $$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + y + bz + w = 1 \; (I) \\ bx + y + az = 1 \; (II) \\ 2y = 2 \; (III) \\ -ax + 2y + bz + w = 4 \; (IV) \end{cases}$$

Da equação (III), temos: y = 1

Subtraindo-se a equação (IV) da equação (I), temos:

$$2ax - y = -3 \Rightarrow 2ax - 1 = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$$

Substituindo-se x e y na equação (II), temos:

$$b \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 1 + az = 1 \Rightarrow z = \frac{b}{a^2} = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$$

Substituindo-se x, y e z na equação (I), temos:

$$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 1 + b \cdot \frac{b}{a^2} + w = 1 \Rightarrow w = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Como $a^2 - b^2 = 0$ e $a \neq 0$, temos: $\frac{b^2}{a^2} = 1$ e

portanto w = 0

Respostas: a) a ≠ 0

$$\text{b) } X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ \frac{1}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - 6\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0.$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine cotg x.

Resolução

a) $$(3 - 2\,.\cos^2 x)\,.\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - 6\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2\,.\cos^2 x)\,.\sec^2 \frac{x}{2} - 6\,.\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 2\,.\cos^2 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 6\,.\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 2\,.\cos^2 x - 6\,.\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 2\,.\cos^2 x - 3\,.\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow 3 - 2\,.(1 - \mathrm{sen}^2 x) - 3\,.\,\mathrm{sen}\,x = 0, \text{ com } \cos\frac{x}{2} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\,.\,\mathrm{sen}^2 x - 3\,.\,\mathrm{sen}\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,x = 1 \text{ ou } \mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$$

No intervalo $[0; \pi[$, resulta:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

b) **Sendo** $\mathrm{cotg}\,x = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$**, temos:**

1) Para $x = \dfrac{\pi}{6} \rightarrow$

$$\rightarrow \mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2) Para $x = \dfrac{\pi}{2} \to \text{cotg}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

3) Para $x = \dfrac{5\pi}{6} \to$

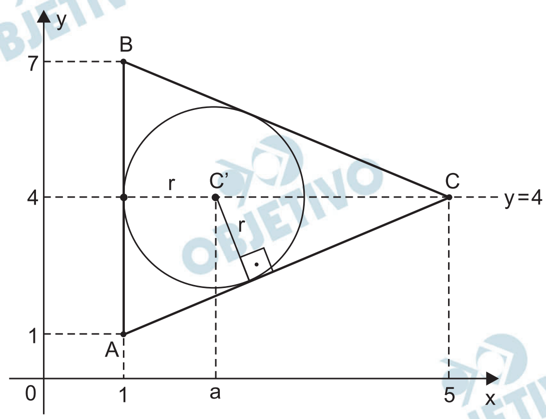
$$\to \text{cotg}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{\cos\dfrac{5\pi}{6}}{\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}} = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Respostas: a) $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

b) $\text{cotg}\,x = \sqrt{3}$ ou $\text{cotg}\,x = 0$ ou $\text{cotg}\,x = -\sqrt{3}$

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A = (1,1), B = (1,7) e C = (5,4) no plano xOy.

Resolução



O triângulo ABC é isósceles e a circunferência inscrita tem seu centro C' pertencente à reta y = 4. Seja C' (a, 4) que acarreta r = a –1 > 0

A reta AC tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$$

A distância de C' à reta AC é igual a r, da qual:

$$a - 1 = \frac{|3a - 16 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} \Leftrightarrow a - 1 = \frac{|3a - 15|}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3a - 15| = 5a - 5 \;\Leftrightarrow a = 5/2 \;\text{ ou }\; a = -5 \text{ (rejeitado)}$$

Assim, $r = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$

Logo, uma equação da circunferência inscrita no triângulo ABC é $(x - 5/2)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$

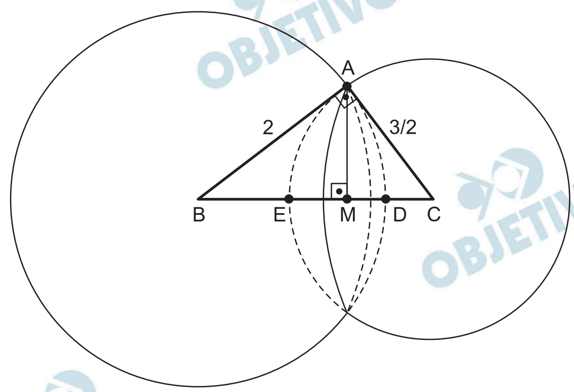
Resposta: $(x - 5/2)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Resolução



a) As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente quando, para qualquer ponto A da intersecção, temos os raios $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ perpendiculares.
Assim, no triângulo ABC, retângulo em A, temos:

$$(BC)^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow BC = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

b) No triângulo retângulo ABC, temos:

I) $(AB)^2 = (BC) \cdot (BM) \Rightarrow 2^2 = \frac{5}{2} \cdot BM \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = \frac{8}{5}$ **cm**

II) $CM = BC - BM = \frac{5}{2} - \frac{8}{5} \Rightarrow CM = \frac{9}{10}$ **cm**

Assim, $DM = BD - BM = 2 - \frac{8}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow DM = \frac{2}{5}$ **cm e** $EM = CE - CM = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow EM = \frac{3}{5}$ **cm**

A área S da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas é dada pela soma das áreas das calotas esféricas com alturas $\overline{DM}$ e $\overline{EM}$ determinadas nas esferas com centros em B e em C, respectivamente.

Logo, $S = 2\pi \,.\, (AB) \,.\, (DM) + 2\pi \,.\, (AC) \,.\, (EM) =$

$$= 2\pi \,.\, 2 \,.\, \frac{2}{5} + 2\pi \,.\, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17\pi}{5}\ cm^2$$

Respostas: a) $\dfrac{5}{2}$ cm b) $\dfrac{17\pi}{5}\ cm^2$