## NOTAÇÕES

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ | $i$ | : | unidade imaginária: $i^2 = -1$ |
| $\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais | $\lvert z\rvert$ | : | módulo do número $z \in \mathbb{C}$ |
| $\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos | $\operatorname{Re} z$ | : | parte real do número $z \in \mathbb{C}$ |
| $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ | $\operatorname{Im} z$ | : | parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$ |
| $(a, +\infty) = ]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$ | $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ | : | conjunto das matrizes reais $m \times n$ |
| $A \backslash B\ = \{x \in A;\ x \notin B\}$ | $A^t$ | : | transposta da matriz $A$ |
| $A^C$ : complementar do conjunto $A$ | $\det A$ | : | determinante da matriz $A$ |

$P(A)$ : conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $A$
$n(A)$ : número de elementos do conjunto finito $A$
$\overline{AB}$ : segmento de reta unindo os pontos $A$ e $B$
$trA$ : soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada $A$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

---

**Questão 1**. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

A ( ) 0. B ( ) 1. C ( ) 2. D ( ) 4. E ( ) 8.

**Questão 2**. Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

A ( ) 246. B ( ) 252. C ( ) 260. D ( ) 268. E ( ) 284.

**Questão 3.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$$f(x + y) = f(x)\, f(y)\,, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(x) \neq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Das afirmações:

I. $f$ pode ser ímpar.

II. $f(0) = 1$.

III. $f$ é injetiva.

IV. $f$ não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

A ( ) I e III. B ( ) II e III. C ( ) I e IV. D ( ) IV. E ( ) I.

**Questão 4**. Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A ( ) $a + bi$.   B ( ) $-a + bi$.   C ( ) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.

D ( ) $a - bi$.   E ( ) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

**Questão 5**. O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A ( ) $3 + \sqrt{3}$.   B ( ) $2 + 3\sqrt{3}$.   C ( ) $2 + \sqrt{2}$.   D ( ) $1 + 2\sqrt{2}$.   E ( ) $2 + 2\sqrt{2}$.

**Questão 6**. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

A ( ) 1.   B ( ) 2.   C ( ) 3.   D ( ) 4.   E ( ) 5.

**Questão 7**. Suponha que os coeficientes reais $a$ e $b$ da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real $r$ com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.

II. As raízes podem ser duplas.

III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I.   B ( ) apenas II.   C ( ) apenas III.

D ( ) apenas II e III.   E ( ) nenhuma.

**Questão 8**. Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a

A ( ) $-3$.   B ( ) $-\frac{1}{3}$.   C ( ) $\frac{1}{3}$.   D ( ) 1.   E ( ) 3.

**Questão 9.** Dados $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t(AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

A ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.   B ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.   C ( ) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.   D ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.   E ( ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**Questão 10.** O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

A ( ) determinado.
B ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
C ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
D ( ) impossível.
E ( ) indeterminado.

**Questão 11.** Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que $a_{11}, a_{12}$ e $a_{22}$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $trA = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

A ( ) $\frac{101}{25}$. B ( ) $\frac{121}{25}$. C ( ) 5. D ( ) $\frac{49}{9}$. E ( ) $\frac{25}{4}$.

**Questão 12**. Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

A ( ) 73%. B ( ) 70%. C ( ) 68%. D ( ) 65%. E ( ) 64%.

**Questão 13.** Considere o triângulo $ABC$ de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$ e $\gamma = B\widehat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite $c$ como raiz dupla, pode-se afirmar que

A ( ) $\alpha = 90^o$.
B ( ) $\beta = 60^o$.
C ( ) $\gamma = 90^o$.
D ( ) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^o$.
E ( ) O triângulo é retângulo e $b$ é hipotenusa.

**Questão 14.** No plano, considere $S$ o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, $S$ é

A ( ) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2, 1)$.
B ( ) uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 2)$.
C ( ) uma hipérbole.
D ( ) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
E ( ) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

**Questão 15.** Do triângulo de vértices $A, B$ e $C$, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2\ cm$, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede $2\ cm$ e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede $30^o$. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em $cm$, igual a

A ( ) $2-\sqrt{3}$. B ( ) $\dfrac{1}{3}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. D ( ) $2\sqrt{3}-3$. E ( ) $\dfrac{1}{2}$.

**Questão 16.** A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2-4x-4y+3=0$ é igual a

A ( ) 2. B ( ) $\dfrac{3}{2}$. C ( ) 1. D ( ) $\dfrac{3}{4}$. E ( ) $\dfrac{1}{2}$.

**Questão 17.** A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right]\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$$

é equivalente a

A ( ) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x]\operatorname{cotg} x$. B ( ) $[\operatorname{sen} x + \cos x]\operatorname{tg} x$. C ( ) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x]\operatorname{cotg}^2 x$.
D ( ) $[1-\operatorname{cotg}^2 x]\operatorname{sen} x$. E ( ) $[1+\operatorname{cotg}^2 x]\,[\operatorname{sen} x + \cos x]$.

**Questão 18.** Sejam $C$ uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0,0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de $C$. Sabendo que $(1,3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

A ( ) $y+3x-6=0$. B ( ) $3y+x-10=0$. C ( ) $2y+x-7=0$.
D ( ) $y+x-4=0$. E ( ) $2y+3x-9=0$.

**Questão 19.** Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de $8\ cm$ de altura e de $60^o$ de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}\ cm$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em $cm^3$, é igual a

A ( ) $\dfrac{416}{9}\pi$. B ( ) $\dfrac{480}{9}\pi$. C ( ) $\dfrac{500}{9}\pi$. D ( ) $\dfrac{512}{9}\pi$. E ( ) $\dfrac{542}{9}\pi$.

**Questão 20.** Os pontos $A=(3,4)$ e $B=(4,3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

A ( ) $\sqrt{8}$. B ( ) 3. C ( ) $\sqrt{12}$. D ( ) 4. E ( ) $\sqrt{18}$.

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

**Questão 21.** Seja $S$ o conjunto solução da inequação

$$(x-9)\left|\log_{x+4}(x^3-26x)\right| \leq 0.$$

Determine o conjunto $S^C$.

**Questão 22.** **Sejam** $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \operatorname{Re} w \leq -13 \ e\ \operatorname{Im} w \leq 4\}.$$

**Questão 23.** Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

a) Mostre que $f$ é injetora.

b) Determine $D = \{\ f(x);\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\ \}$ e $f^{-1}:\ D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

**Questão 24.** Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta,\ \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os $\gamma_n,\ n = 1, 2,\ \ldots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.  II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.  III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

**Questão 25.** Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

**Questão 26.** Sejam $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se $AX$ é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então $A$ é a matriz nula.

b) Se $A$ e $B$ são não nulas e tais que $AB$ é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

**Questão 27.** Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{1}{6}\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\pi\right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

**Questão 28.** Dadas a circunferência $C:\ (x-3)^2+(y-1)^2=20$ e a reta $r:\ 3x-y+5=0$, considere a reta $t$ que tangencia $C$, forma um ângulo de $45^o$ com $r$ e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta $t$.

**Questão 29.** Considere as $n$ retas

$$r_i : y = m_i x + 10,\ \ i = 1, 2, ..., n;\ \ n \geq 5,$$

em que os coeficientes $m_i$, em ordem crescente de $i$, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta $r_5$ tangencia a circunferência de equação $x^2+y^2 = 25$, determine o valor de $q$.

**Questão 30.** A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida $a$ do apótema da base.