NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$

$A \backslash B = \{x \in A;\ x \notin B\}$

A^C: complementar do conjunto A

i: unidade imaginária; $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

Re z: parte real do $z \in \mathbb{C}$

Im z : parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

A^t: transposta da matriz A

det A: determinante da matriz A

P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

n(A): número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

tr A : soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

Obs.: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 C

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a,b\}$ e $A^C \backslash B = \{d,e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 8.

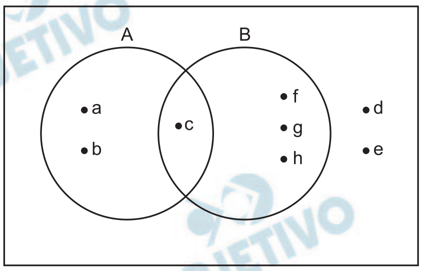
Resolução

1) $(B^C \cup A)^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow (B^C)^C \cap A^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B \cap A^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow B \backslash A = \{f; g; h\}$

2) $B^C \cap A = \{a; b\} \Leftrightarrow A \backslash B = \{a; b\}$

3) $A^C \backslash B = \{d; e\} \Leftrightarrow U \backslash (A \cup B) = \{d; e\}$

De (1), (2) e (3), temos o diagrama



Logo, $A \cap B = \{c\}$ e $P(A \cap B) = \{\emptyset, \{c\}\}$

Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

a) 246. b) 252. c) 260. d) 268. e) 284.

Resolução

Se, entre os 1000 carros da empresa, x têm motor a gasolina e 1000 – x possuem motor "flex", temos:

$$(100 - 36)\% \cdot (1000 - x) + 36\%\, x = 556 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 640 - 0,64x + 0,36x = 556 \Leftrightarrow 0,28x = 84 \Leftrightarrow x = 300$$

Portanto, o número de carros tricombustíveis é

$$36\% \cdot (1000 - 300) = \frac{36}{100} \cdot 700 = 252$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função satisfazendo às condições: $f(x + y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.

II. $f(0) = 1$.

III. f é injetiva.

IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

a) I e III. b) II e III. c) I e IV.
d) IV. e) I.

Resolução

Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x + y) = f(x) . f(y)$ para todo $x; y \in R$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então:

1) $f(x) \in CD(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f(0 + 0) = f(0) . f(0) \Leftrightarrow f(0) = [f(0)]^2 \Rightarrow f(0) = 1$, pois $f(0) \neq 0$.

3) Para qualquer $a \neq 0$, tem-se:
$f(-a + a) = f(-a) . f(a) = f(0) = 1$ e, portanto f(a) e f(–a) tem o mesmo sinal. Assim, f não pode ser ímpar.

4) $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 + k$, com $k \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2 + k) = f(x_2) . f(k) \neq f(x_2)$, pois $f(k) \neq 1$.
Assim, f é injetiva.

5) $$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) . f\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$= \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \text{ pois } f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0.$$

Desta forma, $Im(f) \subset \mathbb{R}_+$ e $Im(f) \neq CD(f)$, então a função não é sobrejetiva.
Assim, apenas a afirmação (I) é falsa.

Se $a = \cos \frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen } \frac{\pi}{5}$, então, o número complexo

$$\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{\pi}{5}\right)^{54}$$ é igual a

a) $a + bi$.
b) $-a + bi$.
c) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.
d) $a - bi$.
e) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

Resolução

Se $a = \cos \frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen } \frac{\pi}{5}$ então:

1) $$\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \,.\, \text{sen } \frac{\pi}{5}\right)^{54} =$$

$$= \cos\left(\frac{54\pi}{5}\right) + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{54\pi}{5}\right) =$$

$$= \cos\left(10\pi + \frac{4\pi}{5}\right) + i \,.\, \text{sen}\left(10\pi + \frac{4\pi}{5}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) =$$

2) $$\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} = -a$$

3) $$\text{sen } \frac{4\pi}{5} = \text{sen } \frac{\pi}{5} = b$$

Assim sendo:

$$\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \,.\, \text{sen } \frac{\pi}{5}\right)^{54} =$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} + i \,.\, \text{sen } \frac{4\pi}{5} = -a + bi$$

5 E

O polinômio de grau 4

$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)\ x^3 - (a - b)\ x^2 +$

$+ (2a - b + c)\ x + 2\ (a + c)$,

com a, b, $c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

a) $3 + \sqrt{3}$. b) $2 + 3\sqrt{3}$. c) $2 + \sqrt{2}$.

d) $1 + 2\sqrt{2}$. e) $2 + 2\sqrt{2}$.

Resolução

1) $P(x) = (a + 2b + c) \cdot x^4 + (a + b + c) \cdot x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)\ x + 2\ (a + c)$ **é de grau 4 e é uma função par. Asim sendo:**

$$\begin{cases} a + 2b + c \neq 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + b \neq 0 \\ a + b + c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -b \\ b \neq 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

2) Se $b \neq 0$, $a + c = -b$ **e** $a = 2b$, **então**

$P(x) = b\ x^4 - (2b - b)\ x^2 + 2\ (-b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x) = bx^4 - bx^2 - 2b$

3) Resolvendo a equação $P(x) = 0$, **temos:**

$bx^4 - bx^2 - 2b = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = -1$ **ou** $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = i$ **ou** $x = -i$

ou $x = \sqrt{2}$ **ou** $x = -\sqrt{2}$

4) O conjunto-verdade da equação $P(x) = 0$ **é**

$V = \{i; -i; \sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\}$

5) A soma dos módulos das raízes é

$1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

6 C

Considere as funções

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

A multiplicidade das raízes não reais da função composta f o g é igual a

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução

Sendo $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1 =$

$= (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) + 2x \cdot (x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) =$

$= (x^2 - 1) \cdot (x + 1)^2$

e $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, **temos:**

$(fog)\ (x) = [(x - 1)^4 - 1] \cdot [(x - 1)^2 + 1]^2 =$

$= [(x - 1)^2 - 1] \cdot [(x - 1)^2 + 1]^3 =$

$= (x^2 - 2x) \cdot (x^2 - 2x + 2)^3$,

cujas raízes são 0 (raiz simples), 2 (raiz simples), 1 + i (raiz tripla) e 1 – i (raiz tripla).

Logo, a multiplicidade de cada raiz não-real da função composta fog é igual a 3.

Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.

II. As raízes podem ser duplas.

III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas II e III e) nenhuma.

Resolução

1) Seja $r = p + qi$, com $p^2 + q^2 \neq 1$ e $q \neq 0$, a raiz não real da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, de coeficientes reais.

2) Se r for raiz, então $\dfrac{1}{r}$ também o será, pois

$$\frac{1}{r^4} + \frac{a}{r^3} + \frac{b}{r^2} + \frac{a}{r} + 1 =$$

$$= \frac{1 + ar + br^2 + ar^3 + r^4}{r^4} = \frac{0}{r^4} = 0$$

3) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p + qi} = \dfrac{p - qi}{p^2 + q^2} \neq p - qi$**, pois** $p^2 + q^2 \neq 1$

4) Já que a equação tem coeficientes reais, se $r = p + qi$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p + qi}$ são raízes, então, $p - qi$ e $\dfrac{1}{p - qi}$ também serão raízes.

5) A equação admite, portanto, quatro raízes distintas, sendo todas não-reais.

Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\dfrac{a}{b}$ é igual a

a) -3. b) $-\dfrac{1}{3}$. c) $\dfrac{1}{3}$. d) 1. e) 3.

Resolução

Sejam $\dfrac{\alpha}{q}$, α e $\alpha \cdot q$ as raízes da equação em progressão geométrica de razão q ($q \in \mathbb{R}^*$).

De acordo com as relações de Girard, temos:

$$\frac{\alpha}{q} \cdot \alpha \cdot \alpha q = \frac{-54}{2} \Leftrightarrow \alpha^3 = -27$$

Logo, a = – 3 é uma das raízes e, conseqüentemente,

$$2 \cdot (-3)^3 - a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 54 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -54 - 9a - 3b + 54 = 0 \Leftrightarrow 9a = -3b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

Dados $A \in M_{3x2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3x1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2x1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t (AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **e** $x_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

Temos:

I) $(A \,.\, X_0 - b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -x \\ y \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-1 \\ y-1 \\ x-1 \end{bmatrix}$$

II) $(A \,.\, X_0 - b)^t = [-x-1 \quad y-1 \quad x-1]$

III) $(A \,.\, X_0 - b)^t \,.\, (A \,.\, X_0 - b) =$

$$[-x-1 \quad y-1 \quad x-1] \,.\, \begin{bmatrix} -x-1 \\ y-1 \\ x-1 \end{bmatrix} =$$

$= [(-x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2] =$

$= [2 \,.\, (x^2 + 1) + (y-1)^2]$.

Interpretando $\sqrt{C}$ **(**$C \in M_{1x1}(\mathbb{R})$**) como sendo a raiz quadrada do elemento desta matriz,**

$\sqrt{(A\,X_0 - b)^t \,.\, (A\,X_0 - b)} = \sqrt{[2\,.(x^2+1) + (y-1)^2]}$, **que assume o menor valor possível para** $x = 0$ **e** $y = 1$**, pois** $x^2 \geq 0$ **e** $(y-1)^2 \geq 0$.

Logo, a melhor aproximação quadrática do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ é } x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10 D

O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

a) determinado.

b) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.

c) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.

d) impossível.

e) indeterminado.

Resolução

1) Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$, então:

$$a_1 . 0 + a_2 . c_2 = b_1 . 0 + b_2c_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = b_2 = 0$$

e a equação $0 . x + 0 . y = c_2 \neq 0$ não tem solução.

2) Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$, então:

$$a_1 . c_1 + a_2 . 0 = b_1 . c_1 + b_2 . 0 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1 = 0$$

e a equação $0 . x + 0y = c_1 \neq 0$ não tem solução

3) Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, então:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1c_1x + b_1c_1y = c_1^2 \\ a_2c_2x + b_2c_2y = c_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1c_1 + a_2c_2)\, x + (b_1c_1 + b_2c_2)y = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 . x + 0 . y = c_1^2 + c^2 \neq 0$ e, portanto, o *sistema é impossível*.

11 A

Seja $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\operatorname{tr} A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2x1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

a) $\dfrac{101}{25}$. b) $\dfrac{121}{25}$. c) 5. d) $\dfrac{49}{9}$. e) $\dfrac{25}{4}$.

Resolução

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **e** $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

I) Sendo A uma matriz simétrica e não-nula e (a_{11}, a_{12}, a_{22}) uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 \end{bmatrix}$$

Como $\operatorname{tr} A = 5 \,.\, a_{11} \Leftrightarrow a_{11} + a_{11} \,.\, q^2 = 5 \,.\, a_{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{11} \,.\, q^2 = 4 \,.\, a_{11} \Leftrightarrow q^2 = 4$**, pois** $a_{11} \neq 0$

II) $A \,.\, X = X \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \,.\, x + a_{11} \,.\, q \,.\, y \\ a_{11} \,.\, q \,.\, x + a_{11} \,.\, q^2 \,.\, y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \,.\, x + a_{11} \,.\, q \,.\, y = x \\ a_{11} \,.\, q \,.\, x + a_{11} \,.\, q^2 \,.\, y = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - 1) \,.\, x + a_{11} \,.\, q \,.\, y = 0 \\ a_{11} \,.\, q \,.\, x + (a_{11} \,.\, q^2 - 1) \,.\, y = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema linear homogêneo acima admita solução não-nula, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{11} \cdot q \\ a_{11} \cdot q & a_{11} \cdot q^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - a_{11} - a_{11} \,.\, q^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - a_{11} - 4 \,.\, a_{11} = 0 \Leftrightarrow a_{11} = \frac{1}{5}$$

Logo, $a_{11}^2 + q^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 4 = \dfrac{101}{25}$

12 B

Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

a) 73%. b) 70%. c) 68%. d) 65%. e) 64%.

Resolução

Dos 18% de estrangeiros proficientes em inglês, 75%, isto é, 75% de 18% = 13,5% foram classificados como proficientes.

Dos 82% de estrangeiros não-proficientes em inglês, 7%, isto é, 7% de 82% = 5,74% foram classificados como proficientes.

Se o estrangeiro escolhido ao acaso foi classificado como proficiente em inglês, então a probabilidade de ele ser efetivamente proficiente em inglês é

$$p = \frac{13{,}5}{13{,}5 + 5{,}74} = \frac{13{,}5}{19{,}24} \cong 0{,}70 = 70\%$$

13 E

Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx \cos \alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

a) $\alpha = 90°$.

b) $\beta = 60°$.

c) $\gamma = 90°$.

d) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45°$.

e) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Resolução

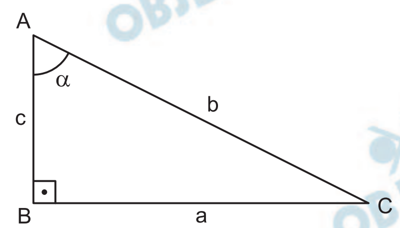
Se a equação em x : $x^2 - 2b\cos \alpha \,.\, x + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, então tem-se a seguinte identidade de polinômios:

$$x^2 - 2b\cos \alpha \,.\, x + (b^2 - a^2) \equiv (x - c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2b\cos \alpha \,.\, x + (b^2 - a^2) \equiv x^2 - 2cx + c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b\cos \alpha = -2c \\ b^2 - a^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{c}{b} \\ b^2 = a^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Pode-se concluir então que o triângulo de lados a, b e c é sempre retângulo e b é a hipotenusa.



14 D

No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, S é

a) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro (2, 1).

b) uma circunferência de raio 1 e centro (1, 2).

c) uma hipérbole.

d) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.

e) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Resolução

Se a reta (t) tem equação x = 1, o ponto A = (3, 2) e sendo P(x, y) um ponto genérico do L.G., temos:

$$d^2_{P,t} + d^2_{P,A} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 + y^2 - 4y + 4 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

A equação representa uma elipse, de centro (2; 2), tal que:

I) $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{2}$ é o comprimento do eixo maior.

II) $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2 \cdot b = 2$ é o comprimento do eixo menor.

Os eixos da elipse têm comprimentos $2\sqrt{2}$ e 2.

15 D

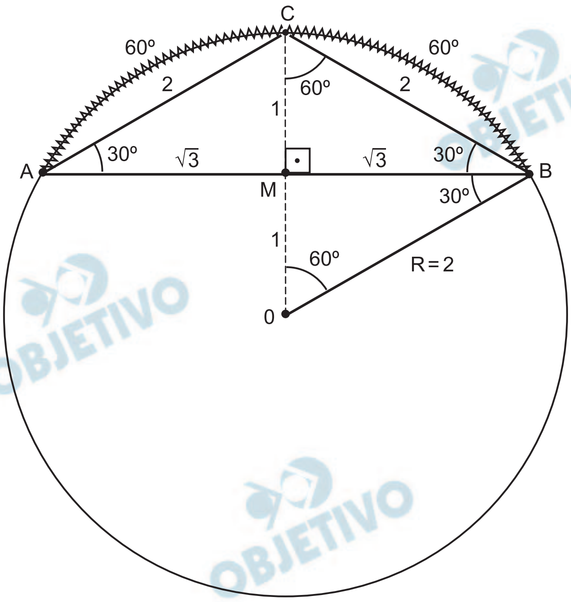
Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio R = 2 cm, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede 2 cm e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede 30°. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

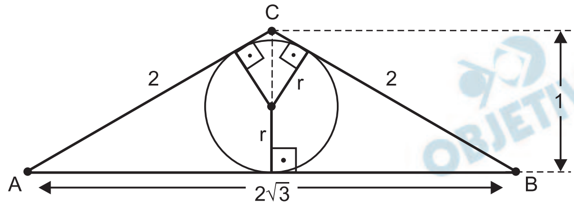
a) $2 - \sqrt{3}$. b) $\dfrac{1}{3}$. c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

d) $2\sqrt{3} - 3$. e) $\dfrac{1}{2}$.

Resolução

De acordo com o enunciado, podemos montar as seguintes figuras:





Assim, sendo S a área do triângulo ABC, em centímetros quadrados, p o semiperímetro desse triângulo, em centímetros, e *r* o raio, em centímetros, da circunferência inscrita nesse triângulo, tem-se:

1º) $S = \dfrac{AB \cdot 1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$

2º) $S = p \cdot r$

Logo: $\sqrt{3} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \cdot r \Leftrightarrow \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) \cdot r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} - 3$

16 E

A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

a) 2. b) $\dfrac{3}{2}$. c) 1. d) $\dfrac{3}{4}$. e) $\dfrac{1}{2}$.

Resolução

$$2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 4y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 2y \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{3}{2} = 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2 \,.\left(y - \frac{1}{4}\right)$$

Sendo $(x - g)^2 = 4 \,.\, f \,.\, (y - h)$ a equação reduzida da parábola, comparando-a com a equação obtida, conclui-se que:

1º) o vértice da parábola é o ponto $\left(1; \dfrac{1}{4}\right)$

2º) A distância entre o vértice e o foco da parábola é a medida f, tal que $4 \,.\, f = 2$, e portanto $f = \dfrac{1}{2}$.

17 A

A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right]\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

é equivalente a

a) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x] \operatorname{cotg} x$.

b) $[\operatorname{sen} x + \cos x] \operatorname{tg} x$.

c) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x] \operatorname{cotg}^2 x$.

d) $[1 - \operatorname{cotg}^2 x] \operatorname{sen} x$.

e) $[1 + \operatorname{cotg}^2 x] [\operatorname{sen} x + \cos x]$

Resolução

$$\frac{2 \,.\, \left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right] . \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \,.\, \left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right] . \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \,.\, [-\cos x + \operatorname{cotg}^2 x] \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} =$$

$$= 2 \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) . \cos\left(\frac{x}{2}\right) . [\operatorname{cotg}^2 x - \cos x] =$$

$$= \operatorname{sen} x \,.\, \left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \cos x\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \,.\, [\cos^2 x - \cos x \,.\, \operatorname{sen}^2 x]}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

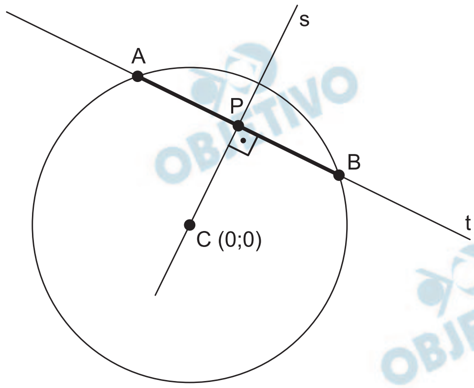
$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} . [\cos x - \operatorname{sen}^2 x] = \operatorname{cotg} x \,.\, [\cos x - \operatorname{sen}^2 x]$$

18 B

Sejam C uma circunferência de raio R > 4 e centro (0,0) e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo que (1,3) é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

a) $y + 3x - 6 = 0$.
b) $3y + x - 10 = 0$.
c) $2y + x - 7 = 0$.
d) $y + x - 4 = 0$.
e) $2y + 3x - 9 = 0$.

Resolução



Sejam *t* e *s*, respectivamente, as retas que contêm $\overline{AB}$ e $\overline{CP}$, sendo P(1;3), ponto médio de $\overline{AB}$.

O coeficiente angular da reta *s* é tal que,

$$m_s = \frac{3-0}{1-0} = 3.$$

O ponto P(1;3) pertence à reta t cujo coeficiente angular é $m_t = -\frac{1}{3}$, pois $t \perp s$.

Dessa forma, a equação da reta t é

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow 3y + x - 10 = 0$$

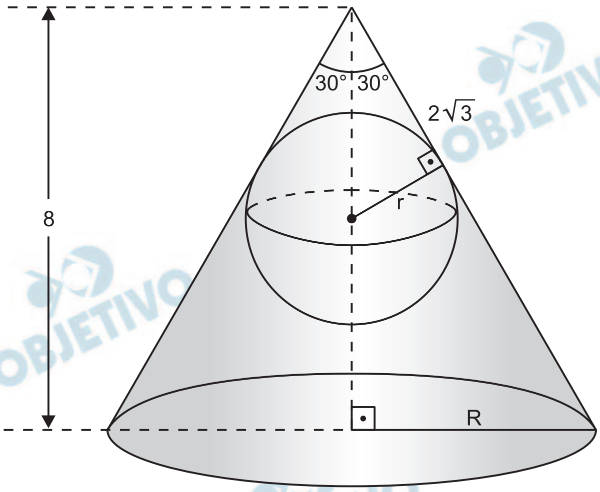
19 A

Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

a) $\frac{416}{9}\pi$. b) $\frac{480}{9}\pi$. c) $\frac{500}{9}\pi$.

d) $\frac{512}{9}\pi$. e) $\frac{542}{9}\pi$.

Resolução



Sendo R o raio da base do cone e r o raio da esfera, ambos, em centímetros, tem-se:

$$1^{\text{o}})\ \text{tg } 30° = \frac{r}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = 2$$

$$2^{\text{o}})\ \text{tg } 30° = \frac{R}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{8} \Leftrightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Assim, o volume V da região interna ao cone, não-ocupada pela esfera, em centímetros cúbicos, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 8 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{64}{3} \cdot 8 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 =$$

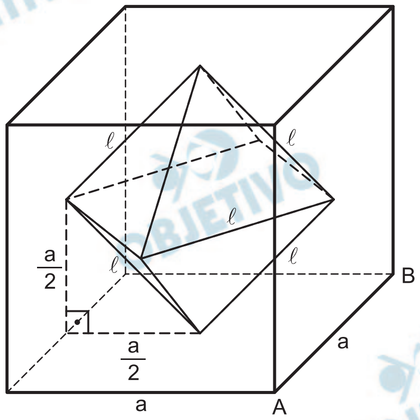
$$= \frac{512\pi}{9} - \frac{32\pi}{3} = \frac{416\pi}{9}$$

20 Ⓒ (com ressalvas)

Os pontos A = (3,4) e B = (4,3) são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

a) $\sqrt{8}$.   b) 3.   c) $\sqrt{12}$.   d) 4   e) $\sqrt{18}$.

Resolução



1º) A medida *a* da aresta do cubo é dada por

$$a = AB = \sqrt{(3-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

2º) Entendendo que os vértices do octaedro são os centros das faces do cubo, então a medida ℓ da aresta do octaedro regular é tal que:

$$\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \ell^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{assim: } \ell^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \Leftrightarrow \ell^2 = 1$$

3º) Entendendo que o examinador queira que seja calculada a área S da superfície total do octaedro, já que este não possui área lateral, então, como tal superfície é composta por oito triângulos eqüiláteros de lado ℓ, tem-se:

$$S = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S = 2\sqrt{3}\,\ell^2$$

$$\text{Assim: } S = 2\sqrt{3} \cdot 1 \Leftrightarrow S = \sqrt{12}$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

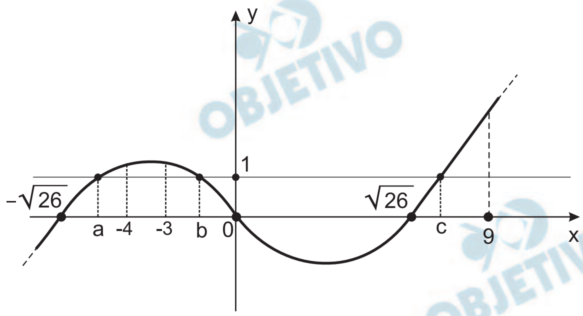
Seja S o conjunto solução da inequação

$(x - 9) \,|\, \log_{x+4}(x^3 - 26x) \,|\, \leq 0.$

Determine o conjunto S^C.

Resolução

Como o gráfico da função $f(x) = x^3 - 26x$ é do tipo



temos:

1) Existe o $\log_{x+4}(x^3 - 26x)$ se, e somente se,

$-4 < x < -3$ ou $-3 < x < 0$ ou $x > \sqrt{26}$

2) Dentro das condições de existência do logaritmo,
$(x - 9) \,.\, |\log_{x+4}(x^3 - 26x)| \leq 0 \Leftrightarrow x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq 9$, para $\log_{x+4}(x^3 - 26x) \neq 0$ e $x = b$ ou $x =$ c (do gráfico acima) para $\log_{x+4}(x^3 - 26x) = 0$

3) Como $b < 9$ e $c < 9$, $S = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, -4 < x < -3$ ou $-3 < x < 0$ ou $\sqrt{26} < x \leq 9\}$ e
$S^C = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -4$ ou $x = -3$ ou $0 \leq x \leq \sqrt{26}$ ou $x > 9\}$

Resposta: $S^C = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -4$ ou $x = -3$ ou $0 \leq x \leq \sqrt{26}$ ou $x > 9\}$

22

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1 + 3i) + y^2(4 - i) - x(2 + 6i) + y(-16 + 4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \text{Re } w \le -13 \text{ e Im } w \le 4\}$.

Resolução

$$w = x^2\,(1 + 3i) + y^2\,(4 - i) - x\,(2 + 6i) + y\,(-16 + 4i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = x^2 + 3x^2\,i + 4y^2 - y^2 i - 2x - 6xi - 16y + 4yi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = (x^2 + 4y^2 - 2x - 16y) + (3x^2 - y^2 - 6x + 4y)i$$

Desta forma:

1) $\text{Re } w \le -13 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 2x - 16y \le -13 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 \le 4 \Leftrightarrow$$

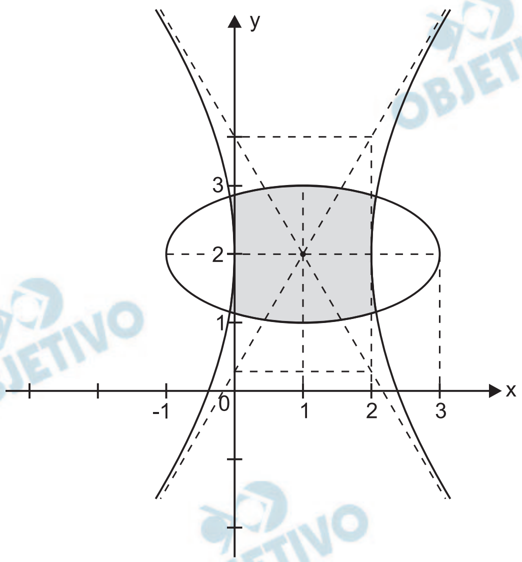
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} \le 1$$ **que é a equação de uma região elíptica de centro (1; 2), semi-eixo maior paralelo ao eixo das abscissas e medindo 2 e semi-eixo menor medindo 1.**

2) $\text{Im } w \le 4 \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 - 6x + 4y \le 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1)^2 - (y - 2)^2 \le 3 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} \le 1$$

que é a equação de uma região determinada por uma hipérbole de centro (1; 2), eixo transverso paralelo ao eixo das abscissas e medindo 1 e eixo conjugado medindo $2.\sqrt{3}$.

3) A representação no plano complexo dessas regiões é a seguinte:



Resposta: O conjunto pedido está representado pelos pontos que formam a figura destacada acima.

Seja f: $\mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e $f^{-1}: D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Resolução

Sendo:

f: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$

conclui-se:

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, temos:

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} \neq \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} \neq 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e, portanto, *f* é injetora.

b) Sendo f^{-1} a função inversa de f, temos:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) + 1 = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

O conjunto $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e $f^{-1}: D \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ é o conjunto-domínio da função f^{-1} e, portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Respostas: a) demonstração

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0, a_1, ..., a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os γ_n, $n = 1, 2, \dots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.

II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Resolução

A equação $x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{11} + a_{10} \cdot x^{10} + a_9 x^9 + a_8 x^8 + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ **é de grau 11 e tem pelo menos uma raiz real.**

I) Verdadeira, pois se $\beta = 0$ **as onze raízes são do tipo** $i\gamma_n$. **Esse número somente será real se** $\gamma_n = 0$ **para algum valor de n. Desta forma, *zero* é raiz da equação e**

$0^{11} + a_{10} \cdot 0^{10} + a_9 \cdot 0^9 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_0 = 0.$

II) Verdadeira, pois as onze raízes são da forma

$(\beta + \gamma_1 i; \beta + \gamma_2 i; \beta + \gamma_3 i; \beta + \gamma_4 i; \beta + \gamma_5 i; \beta;$
$\beta + \gamma_7 i; \beta + \gamma_8 i; \beta + \gamma_9 i; \beta + \gamma_{10} i; \beta + \gamma_{11} i)$ **e tais que** $(\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_5; 0; \gamma_7; \dots; \gamma_{11})$ **formam uma progressão artitmética de soma zero. Desta forma,**

a soma das onze raízes será $11\beta = -\dfrac{a_{10}}{1} = 0$,

portanto $\beta = 0$.

III) Falsa, pois, como visto no item (I) se $\beta = 0$ **então zero é raiz da equação dada. A equação dada é fatorável em**

$x\,(x^{10} + a_{10} x^9 + a_9 x^8 + a_8 x^7 + \dots + a_2 x + a_1) = 0$

O produto das outras *dez* raízes é a_1 **e elas podem não ser nulas. Poderiam ser, por exemplo, – 5i; – 4i; –3i; – 2i; – i; i; 2i; 3i; 4i e 5i.**
Observe que, neste caso,
$(-5; -4; -3; \dots; 0; 1; 2; \dots 5)$ **formam uma progressão aritmética, de razão não-nula.**

25

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Resolução

A probabilidade de um candidato conseguir nota para participar da segunda etapa é 20% = $\frac{1}{5}$ e a de não conseguir nota é 80% = $\frac{4}{5}$.

Dos 6 candidatos, a probabilidade de pelo menos quatro deles conseguirem nota para participar da segunda etapa é:

$$C_{6,4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + C_{6,5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + C_{6,6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left[15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{625} \cdot \frac{265}{25} = \frac{53}{3125}$$

Resposta: $\frac{53}{3125}$

Sejam A, B $\in M_{3x3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3x1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então det A = det B = 0.

Resolução

Se $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$, então $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então

a.1) para $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**, temos:**

$$A \,.\, X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$$

a.2) para $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**, temos:**

$$A \,.\, X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0$$

a.3) para $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**, temos:**

$$A \,.\, X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$$

Desta forma, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

b) 1) Se det A ≠ 0, existe A^{-1} e A . B = O ⇒
⇒ $A^{-1} . A . B = A^{-1} . O \Leftrightarrow I . B = O \Leftrightarrow B = O$
Contrariando a hipótese de que B é não-nula.

2) Se $\det B \neq 0$, existe B^{-1} e $A \,.\, B = O \Rightarrow$

$\Rightarrow A \,.\, B \,.\, B^{-1} = O \,.\, B^{-1} \Leftrightarrow A \,.\, I = O \Leftrightarrow A = O$

Contrariando a hipótese de que A é não-nula.

Dos itens (1) e (2), temos $\det A = \det B = 0$.

Respostas: a) demonstração

b) demonstração

Sabendo que $\text{tg}^2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, para algum

$x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, determine sen x.

Resolução

1) $\text{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **, pois:**

$$\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{2\pi}{3}$$

Assim:

$$\frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\text{tg}\, x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\text{tg}\, x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\,.\,\text{tg}\, x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

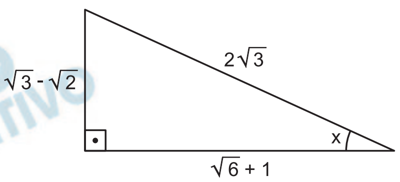
$$\Leftrightarrow 2\,\text{tg}\, x + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\,\text{tg}\, x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\,\text{tg}\, x + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}\,\text{tg}\, x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6 + \sqrt{6})\,\text{tg}\, x = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\, x = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 + \sqrt{6}} \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + 1}$$

2) Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$**, podemos então montar o seguinte triângulo retângulo:**



do qual podemos concluir que:

$$\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$$

Resposta: $\dfrac{3 - \sqrt{6}}{6}$

Dadas a circunferência C: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ e a reta r: $3x - y + 5 = 0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação a reta t.

Resolução

A circunferência C: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ tem centro A (3; 1) e raio igual a $2\sqrt{5}$.

A reta r: $3x - y + 5 = 0$ tem coeficiente angular $m_r = 3$
Sendo m_t, o coeficiente angular da reta t que forma um ângulo de 45° com r, temos

$$\text{tg } 45° = \left|\frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\frac{3 - m_t}{1 + 3m_t}\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - m_t}{1 + 3m_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{3 - m_t}{1 + 3m_t} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_t = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m_t = -2$$

Dessa forma, sendo $h \in \mathbb{R}$, a equação da reta t é tal que:

$$y = \frac{1}{2}x + h \quad \text{ou} \quad y = -2x + h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 2h = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + y - h = 0$$

Sabendo que a distância entre a reta t e a origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, temos:

- **Para $x - 2y + 2h = 0$**

$$\frac{|0 - 2 \cdot 0 + 2h|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow h = \pm\frac{3}{2}$$

- **Para $2x + y - h = 0$**

$$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - h|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow h = \pm 3$$

Assim, as equações das retas que formam um ângulo de 45° com r e distam $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ da origem são:

$$x - 2y + \frac{3}{2} = 0, \quad x - 2y - \frac{3}{2} = 0,$$

$$2x + y - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + y + 3 = 0$$

Dentre estas retas, a única que tangencia a circun-

ferência C é a de equação

(t) $2x + y + 3 = 0$, cuja distância ao centro de C, A(3; 1), é igual ao raio $(2\sqrt{5})$.

Com efeito,

$$d_{A,t} = \frac{|2 \,.\, 3 + 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Resposta: uma equação da reta t é $2x + y + 3 = 0$

29

Considere as n retas

$r_i : y = m_i x + 10,\ i = 1, 2, ..., n;\ n \geq 5,$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Resolução

Sendo m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 5$, termos de uma progressão aritmética de razão $q > 0$ e $m_1 = 0$, temos:

$(m_1; m_2; m_3; m_4; m_5; \ldots) = (0; q; 2q; 3p; 4q; \ldots) =$

Assim, a equação da reta r_5 é da forma

$y = m_5 x + 10 \Leftrightarrow y = 4qx + 10 \Leftrightarrow 4qx - y + 10 = 0$

Sabendo que a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, com centro C(0;0) e raio r = 5, resulta

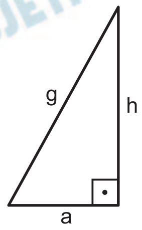
$$\frac{|4q \,.\, 0 - 0 + 10|}{\sqrt{(4q)^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow\ = 5 \Leftrightarrow 10 = 5\sqrt{16q^2 + 1} \Rightarrow$$

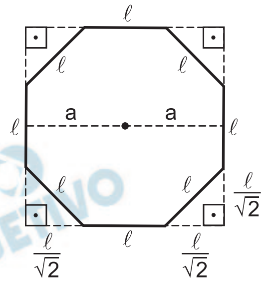
$$\Rightarrow 4 = 16q^2 + 1 \Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ pois } q > 0$$

Resposta: $q = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

Resolução





Sendo ℓ, h e g, respectivamente, as medidas da aresta da base, da altura, e do apótema da pirâmide regular octogonal, tem-se:

1º) $\ell + \dfrac{\ell}{\sqrt{2}} + \dfrac{\ell}{\sqrt{2}} = 2a \Leftrightarrow \ell + \ell\sqrt{2} = 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{2a}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \ell = 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$$

2º) $\dfrac{4\ell g}{4\ell a} = \sqrt{5} \Leftrightarrow g = \sqrt{5}\,a$

3º) $g^2 = h^2 + a^2$

Assim: $\left(\sqrt{5}\,a\right)^2 = h^2 + a^2 \Leftrightarrow h = 2a$

4º) O volume V dessa pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base pela sua altura.
Assim:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\ell \cdot a \cdot h \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 2\left(\sqrt{2}-1\right)a \cdot a \cdot 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{16\left(\sqrt{2}-1\right)a^3}{3}$$

Resposta: $\dfrac{16\left(\sqrt{2}-1\right)a^3}{3}$

Comentário

Com 18 questões de álgebra, 3 de trigonometria, 4 de geometria e 5 de geometria analítica, algumas muito mal enunciadas e outras apresentando alto grau de complexidade, com enunciados rebuscados e notações não muito usuais, a banca examinadora elaborou uma prova de matemática bastante trabalhosa, que certamente exigiu um grande empenho por parte dos candidatos mais bem preparados, os quais devem ter ficado extremamente extenuados por conta da prova.