1 A

Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

Resolução

*Seja **a** o número de homens e **a** o número de mulheres. Temos, conforme a tabela*

	Homens	Mulheres	População
Total	a	a	2a
Daltônicos	5% a	0,25% a	5% a + 0,25% a

A probabilidade de ser mulher uma pessoa daltônica é:

$$P = \frac{0,25\%\ a}{5\%\ a + 0,25\%\ a} = \frac{0,0025\ a}{0,05\ a + 0,0025\ a} =$$

$$= \frac{0,0025\ a}{0,0525\ a} = \frac{25}{525} = \frac{1}{21}$$

2 B

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então, $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

a) –2 b) 0 c) 1 d) 2 e) $2i$

Resolução

1) $|\alpha| = |\beta| = 1$, *então* $\alpha = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$ *e* $\beta = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y$.

2) $\alpha - \beta = (\cos x - \cos y) + i \cdot (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)$

3) $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2} = \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 2.\cos x.\cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x - 2.\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos y + \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow \cos(x - y) = 0$

4) $\alpha^2 + \beta^2 = \cos 2x + i \cdot \operatorname{sen} 2x + \cos 2y + i \cdot \operatorname{sen} 2y =$

$= (\cos 2x + \cos 2y) + i \cdot (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y) =$

$= 2 \cdot \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) +$

$i \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(x + y) \cdot \cos(x - y) = 0,$

pois $\cos(x - y) = 0$

03 A

Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

a) –4 b) –3 c) 0 d) 1 e) 4

Resolução

Admitindo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *com* $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$, *temos:*

I) $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{com}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{pmatrix}$$

matrizes completa e incompleta do sistema, com características respectivamente iguais a p e q.

II) Para k = 0, temos: p = q = 2 (sistema possível e indeterminado)

Para k = – 4, temos: p ≠ q (sistema impossível)

Dessa forma, T = –4, S = 0 e T – S = – 4

4 D

Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3\,(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$

c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$

e) $5 \cdot 3^{n-1}$

Resolução

1) Como $(A^{-1} + C^{-1}) \cdot A = I + C^{-1} \cdot A$, *temos:*

$\det[(A^{-1} + C^{-1}) \cdot A] = \det(I + C^{-1} \cdot A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ *det* $(A^{-1} + C^{-1}) \cdot$ *det* $A =$ *det* $(I + C^{-1} \cdot A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ *det* $(A^{-1} + C^{-1}) \cdot 5 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$ *det* $(A^{-1} + C^{-1}) = \dfrac{1}{15}$

2) $detB = det\,[3(A^{-1} + C^{-1})^t] = 3^n \cdot det(A^{-1} + C^{-1})^t =$

$= 3^n \cdot det\,(A^{-1} + C^{-1}) = 3^n \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{3^{n-1}}{5}$

5 B

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30 b) 32 c) 34 d)36 e) 38

Resolução

Sendo $(2;\ 2q;\ 2q^2;\ 2q^3;\ 2q^4)$ *os graus dos 5 polinômios considerados, temos:*

1) $gr\ [P] = 2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 = 62\ e\ q \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q - 30 = 0\ e\ q \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (q-2)\,(q^3 + 3q^2 + 7q + 15) = 0 \Leftrightarrow q = 2$*, pois,*

para $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$*, tem-se* $q^3 + 3q^2 + 7q + 15 > 0$

2) O grau do polinômio de maior grau, entre os cinco considerados, é $2q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$

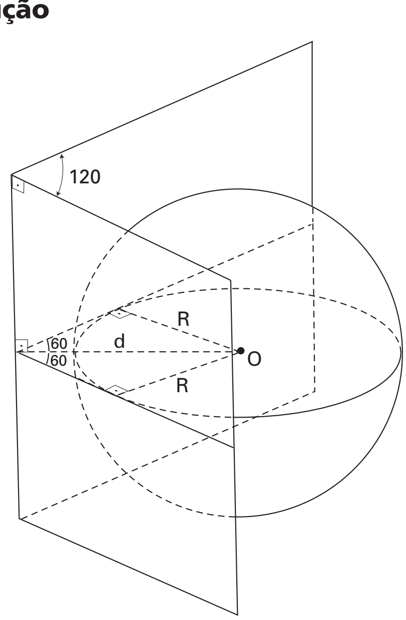
06 E

Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$ e) 2

Resolução



Sendo R o raio da esfera e **d** *a distância da aresta do diedro ao centro O da esfera, tem-se:*

1) $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi\ cm^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^3 = 3\sqrt{3}\ cm^3 \Leftrightarrow R = \sqrt{3}\ cm$

2) $sen60^0 = \dfrac{R}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{R}{sen60^0}$

Assim:

$d = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\ cm \Leftrightarrow d = 2\ cm$

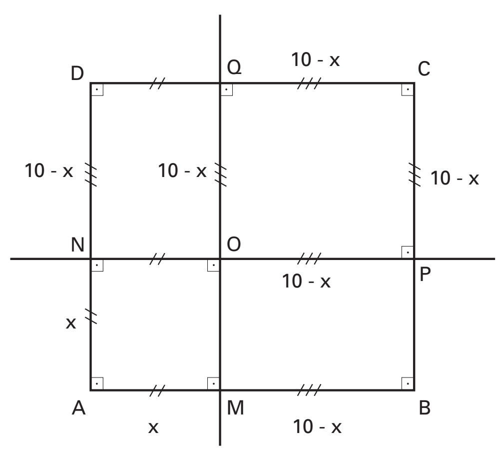
7 D

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M, traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N, uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a) $15 + 5\sqrt{5}$ b) $10 + 5\sqrt{5}$ c) $10 - \sqrt{5}$

d) $15 - 5\sqrt{5}$ e) $10 - 3\sqrt{5}$

Resolução



Sendo x (0<x<10) a distância, em metros, entre os pontos A e M, de acordo com o enunciado, tem-se:

$\left((10 - x)^2\right)^2 = x^2 \cdot 10^2 \Leftrightarrow \left((10 - x)^2\right)^2 = (x \cdot 10)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100 - 20x + x^2 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 30x + 100 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{30-\sqrt{500}}{2},\ \text{pois } x < 10$$

$$\text{Portanto: } x = \frac{30-10\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 15-5\sqrt{5}$$

8 A

Considere o polinômio

$p(x) = a_5\, x^5 + a_4\, x^4 + a_3\, x^3 + a_2\, x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a

a) –25

b) –27

c) –36

d) –39

e) –40

Resolução

*Seja **r** a razão da progressão aritmética*

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), \text{com } a_4 = \frac{1}{2}$$

1) $a_5 = a_4 + r = \dfrac{1}{2} + r\ (I)$

2) *Como $x = -1$ é raiz de*

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1,$$

temos:

$$p(-1) = -a_5 + \underbrace{a_4 - a_3}_{r} + \underbrace{a_2 - a_1}_{r} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a_5 + 2r = 0 \Leftrightarrow a_5 = 2r \qquad (II)$$

3) *De (I) e (II), tem-se* $\dfrac{1}{2} + r = 2r \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

4) *A progressão aritmética considerada é*

$$\left(-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right),\ \text{pois } a_4 = \frac{1}{2} \ \text{ e } \ r = \frac{1}{2}$$

O polinômio considerado é

$$p(x) = 1 \cdot x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 0 \cdot x^3 - \frac{1}{2}x^2 - (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

5) *Dessa forma,*

$$p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 1 = -25$$

09 C

Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

a) –1

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Resolução

De acordo com o enunciado, o conjunto solução da equação $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$ é

$$\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; m; n\right\},\ \text{com } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Assim, } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot m \cdot n = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot n = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \cdot n = -1$$

Se $m \cdot n = -1$ *e* $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}$, *então*:

$m = 1$ *e* $n = -1$ *ou* $m = -1$ *e* $n = 1$

Escrevendo a equação apresentada na forma fatorada, temos:

$$2 \cdot (x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

Logo: $a = -2$, $b = -1$, $c = 2$

O maior valor é 2.

10 E

É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)\, x^3 + (b + 3c + 1)\, x^2 + (c - a)\, x + (a + b + 4) = 0$$

com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a

a) –2 b) 4

c) 6 d) 9

e) 12

Resolução

Lembrando que sendo $a_0 \neq 0$, a equação

$a_0 x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ é recíproca de primeira espécie se, e somente se, $a_0 = a_3$ e $a_1 = a_2$ e, sabendo que 1 é raiz da equação, temos:

$$\begin{cases} a + c + 2 = a + b + 4 \\ b + 3c + 1 = c - a \\ a + c + 2 + b + 3c + 1 + c - a + a + b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 2 \\ a + b + 2c = -1 \\ a + 2b + 5c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = -7 \\ -b + c = 2 \\ -b - 3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = -7 \\ -b + c = 2 \\ -4c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Logo, o produto abc é igual a

$4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 12$

11 B

Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de

$$\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{4}{5}\right)$$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\dfrac{7}{25}$

c) $\dfrac{4}{15}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

Resolução

Nas condições do problema, temos:

1) $\text{arcsen}\ \dfrac{3}{5} = a \Leftrightarrow \text{sen}\ a = \dfrac{3}{5}$ e $\cos a = \dfrac{4}{5}$

2) $\text{arccos}\ \dfrac{4}{5} = b \Leftrightarrow \cos b = \dfrac{4}{5}$ e $\text{sen}\ b = \dfrac{3}{5}$

Portanto:

$$\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{3}{5} + \text{arccos}\ \frac{4}{5}\right) = \cos(a + b) =$$

$$= \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$

12 E

Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}(x-1)$

b) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

d) $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$

e) $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Resolução

A equação da cônica λ, no 1º quadrante, resulta:

$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$

*Seja **t** a reta tangente a λ no ponto **P** $(2; \sqrt{3})$.*

$$\text{Se } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

*então o coeficiente angular da reta **t** é*

$$m_t = \frac{2}{\sqrt{2^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

*A reta **r**, perpendicular à reta **t**, no ponto **P** $(2; \sqrt{3})$, tem equação:*

$$y - \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x-4)$$

13 C

O conjunto imagem e o período de

$f(x) = 2\,\text{sen}^2(3x) + \text{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π

b) $[-2, 2]$ e $\dfrac{2\pi}{3}$

c) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ e $\dfrac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ e $\dfrac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ e $\dfrac{2\pi}{3}$

Resolução

$f(x) = 2 \cdot \text{sen}^2(3x) + \text{sen}(6x) - 1 =$

$= \text{sen}(6x) - [1 - 2 \cdot \text{sen}^2(3x)] =$

$= \text{sen}(6x) - \cos(6x) =$

$= sen(6x) - sen(90^o - 6x) =$

$$= 2 \cdot \cos\left(\frac{6x + 90^o - 6x}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{6x - 90^o + 6x}{2}\right) =$$

$= 2 \cdot \cos 45^o \cdot sen\ (6x - 45^o) =$

$= \sqrt{2} \cdot sen\ (6x - 45^o)$

Sendo $f(x) = \sqrt{2} \cdot sen(6x - 45^o)$, *temos que:*

1) $-1 \leq sen\ (6x - 45^o) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot sen(6x - 45^o) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$, *isto é, o conjunto imagem de* $f(x)$ *é o intervalo* $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$

2) *o período da função resulta:* $P = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

14 D

Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de

$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \,.\, 5^x| = |5^x - 1|$ é

a) $\left\{0,\ 2 \pm \sqrt{5},\ 2 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) $\left\{0,\ 1,\ \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$

c) $\left\{0,\ \frac{1}{2}\log_5 2,\ \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

d) $\left\{0,\ \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right),\ \log_5\left(2 + \sqrt{3}\right),\ \log_5\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}$

e) A única solução é $x = 0$

Resolução

Substituindo 5^x *por* $y > 0$, *temos:*

$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \,.\, 5^x| = |5^x - 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |y^3 - 5y^2 + 4y| = |y - 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |y| \,.\, |y - 1| \,.\, |y - 4| = |y - 1|$

Temos, então, as duas seguintes possibilidades:

1) $|y - 1| = 0 \Leftrightarrow y = 1$

2) $|y| \,.\, |y - 4| = 1 \Leftrightarrow y(y - 4) = \pm 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 1 = 0$ ou $y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{5}$ *ou* $y = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{3}$ *ou* $y = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $y = 2 + \sqrt{5}$,

pois $y > 0$

Assim sendo:

$y = 1$ *ou* $y = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $y = 2 + \sqrt{3}$ *ou*

$y = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^x = 1$ *ou* $5^x = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $5^x = 2 + \sqrt{3}$ *ou*

$5^x = 2 + \sqrt{5}$ *e, portanto:*

$x = 0$ *ou* $x = \log_5\left(2 - \sqrt{3}\right)$ *ou* $x = \log_5\left(2 + \sqrt{3}\right)$ *ou*

$x = \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right)$

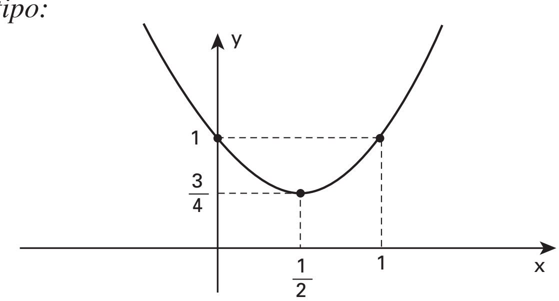
15 C

Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left|\ln\left(x^2 - x + 1\right)\right|$ é injetora, é dado por

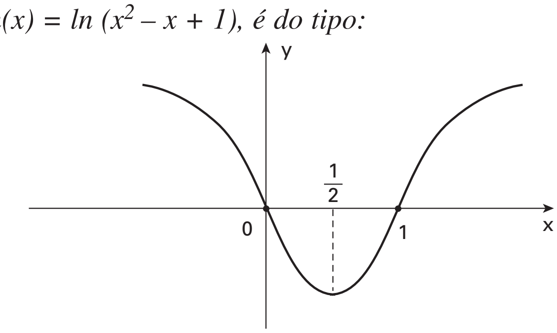
a) $\mathbb{R}$ b) $(-\infty, 1]$ c) $[0, 1/2]$ d) $(0,1)$ e) $[1/2, \infty)$

Resolução

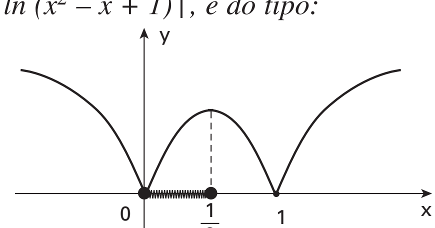
O gráfico da função g, definida por $g(x) = x^2 - x + 1$, *é do tipo:*



O gráfico da função h, definida por $h(x) = \ln\left(x^2 - x + 1\right)$, *é do tipo:*



O gráfico de função f, definida por $f(x) = \left|\ln\left(x^2 - x + 1\right)\right|$, *é do tipo:*



Dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ *apresentados, o único em que f é injetora é* $[0, 1/2]$

16 E

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

que estão no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, é igual a

a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$ d) $\frac{7}{6}\pi$

Resolução

Fazendo-se 3x = a na equação

$$\cos 3x + 2 \cdot \cos 6x + \cos 9x = 0,$$

resulta: $\cos a + 2 \cdot \cos 2a + \cos 3a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos \dfrac{3a + a}{2} \cdot \cos \dfrac{3a - a}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2 \cdot \cos 2a \cdot (1 + \cos a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \cos 2a = 0$ *ou* $\cos a = -1$

Portanto: $\cos 6x = 0$ *ou* $\cos 3x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 6x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ *ou* $3x = \pi + n \cdot 2\pi,\ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{12} + n \cdot \dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \dfrac{2\pi}{3}\ (n \in \mathbb{Z})$

Para $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, *a soma de todas as soluções distintas é:*

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{12}\pi$$

17 A

Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N};\ 1 \le n \le 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$ d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

Resolução

1) O número de elementos de H é

$$C_{365,2} = \frac{365.364}{2} = 66430$$

2) Os elementos de H, cuja soma dos dois elementos é 183, são {1;182}, {2;181}, {3;180}…; {91;92} e, portanto, são 91.

3) A probabilidade pedida é $\dfrac{91}{66430} = \dfrac{1}{730}$

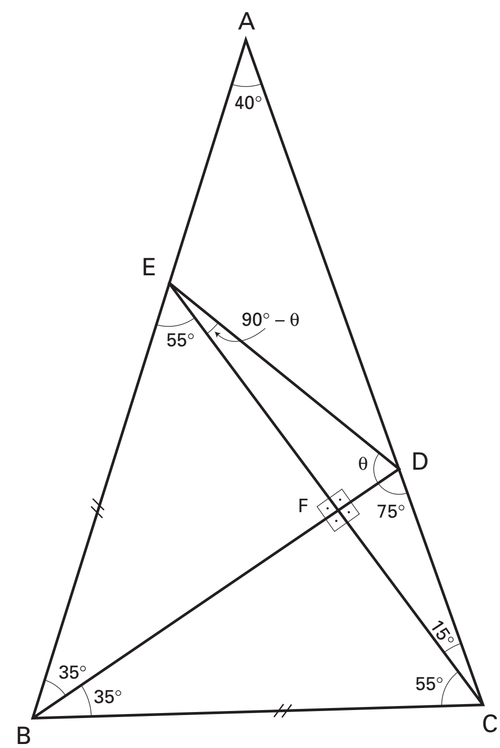
18 D

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40°. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

Resolução

Com os dados do enunciado, pode-se montar a seguinte figura, onde θ é a medida, em graus, do ângulo $E\hat{D}B$



1) Da congruência entre os triângulos retângulos FBC e FBE, resulta: FC = FE

2) Os triângulos retângulos FDC e FDE são congruentes pelo critério LAL, pois: FC = FE, FD é lado comum e $D\hat{F}C = D\hat{F}E = 90^o$

Assim: $F\hat{C}D = F\hat{E}D \Leftrightarrow 15^o = 90^o - \theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \theta = 90^o - 15^o \Leftrightarrow \theta = 75^o$

19 C

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \varnothing$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então, o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) {1, 2, 3, 4, 5} b) {1, 2, 3, 4, 7} c) {1, 3, 7, 8}

d) {1, 3} e) {7, 8}

Resolução

Os conjuntos X, Y, Z e W não estão bem definidos pelas condições dadas. O que se pode afirmar é o que se segue:

a) De $(X - Y) \cap Z = \{1; 2; 3; 4\}$ e

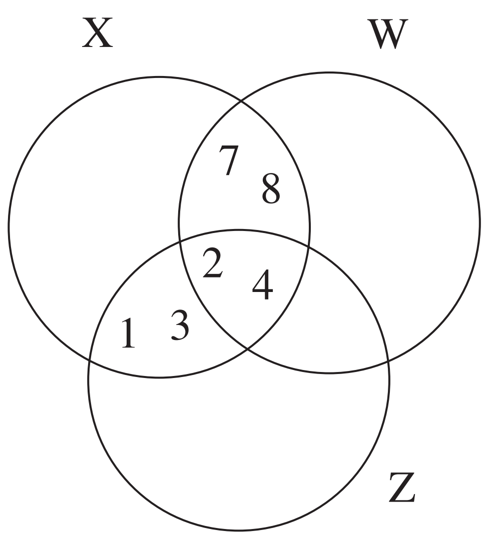
$X \cap W \cap Z = \{2; 4\}$, temos: $\{1; 3\} \subset X$,

$\{1; 3\} \subset Z$, $1 \notin W$ e $3 \notin W$

b) De $W \cap (X - Z) = \{7; 8\}$ e $X \cap W \cap Z = \{2; 4\}$, temos: $\{7; 8\} \subset W$, $\{7; 8\} \subset X$, $7 \notin Z$ e $8 \notin Z$

c) De $Y = \{5; 6\}$ e $Z \cap Y = \varnothing$, temos: $5 \notin Z$ e $6 \notin Z$

d) As informações dos itens a, b e c permitem colocar os números 1, 2, 3, 4, 7 e 8 conforme o diagrama



Do diagrama, pode-se determinar que

$X \cap (Z \cup W) = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$

e) Como $\{2; 4\} \subset Z$ e $\{2; 4\} \subset W$, temos que

$\{2; 4\} \subset [W \cap (Y \cup Z)]$

Como $1 \notin W$ e $3 \notin W$, temos que

$1 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$ e $3 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$

Como $7 \notin Z$ e $8 \notin Z$, temos que

$7 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$ e $8 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$

f) $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] =$

$= \{1; 2; 3; 4; 7; 8\} - [W \cap (Y \cup Z)] =$

$= \{1; 3; 7; 8\}$

20 B

Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja *P* um ponto no plano definido por *r* e *s* e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de *r*. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero *PQR* cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, são iguais a

a) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

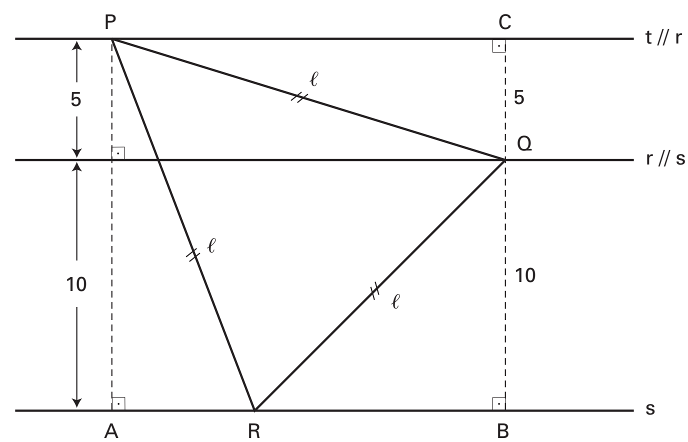
b) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

Resolução



Seja ℓ a medida, em centímetros, do lado do triângulo eqüilátero PQR

1) $AR^2 + 15^2 = \ell^2 \Rightarrow AR = \sqrt{\ell^2 - 225}$

2) $RB^2 + 10^2 = \ell^2 \Rightarrow RB = \sqrt{\ell^2 - 100}$

3) $PC = AB = AR + RB$

Assim: $PC = \sqrt{\ell^2 - 225} + \sqrt{\ell^2 - 100}$

4) $(PC)^2 + 5^2 = \ell^2$

$$Assim: \left(\sqrt{\ell^2 - 225} + \sqrt{\ell^2 - 100}\right)^2 + 5^2 = \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(\ell^2 - 225)(\ell^2 - 100)} = 300 - \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\ell^4 - 700\ell^2 = 0 \qquad \ell^2 = \frac{700}{3}, \quad pois\ \ell^2 > 0$$

5) A área S, em centímetros quadrados, do triângulo eqüilátero PQR é dada por:

$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{700}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{175\sqrt{3}}{3}$$

6) O perímetro u, em centímetros, do triângulo eqüilátero PQR é dado por:

$$u = 3\ell = 3 \cdot \sqrt{\frac{700}{3}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{2100}{9}} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$$

21

Dado o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\right\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Resolução

I) $3x^2 + 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ *ou* $x \geqslant 0$

II) $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x^3 - 3x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (x^3 - x - 2x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x[x(x+1)(x-1) - 2(x+1)] \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x(x+1)(x^2 - x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+1)(x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+1)^2(x-2) > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x < 0$ *ou* $x > 2)$ *e* $x \neq -1$.

De I e II, concluímos que

$$\left(x \leq -\frac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right) \text{ ou } x > 2$$

Resposta:

$$A =]-\infty; -1[\cup]-1; -\frac{2}{3}] \cup]2; +\infty[$$

22

Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z + 2| < 3\}.$$

Resolução

1) $4z^6 + 256 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^6 = 64(\cos 180° + i \cdot \text{sen } 180°)$

2) As raízes dessa equação são:

$z_1 = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = 2 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°) = 2i$

$z_3 = 2 \cdot (\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°) = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = 2 \cdot (\cos 210° + i \cdot \text{sen } 210°) = -\sqrt{3} - i$

$z_5 = 2 \cdot (\cos 270° + i \cdot \text{sen } 270°) = -2i$

$z_6 = 2 \cdot (\cos 330° + i \cdot \text{sen } 330°) = \sqrt{3} - i$

3) Observe que:

$|2 \pm 2i|^2 = 8$

$|2 + \sqrt{3} \pm i|^2 = 8 + 4\sqrt{3} \cong 14{,}9$

$|2 - \sqrt{3} \pm i|^2 = 8 - 4\sqrt{3} \cong 1{,}1$

4) Os valores de z encontrados em (2) que obedecem à condição

$1 < |z + 2| < 3 \Leftrightarrow 1 < |z + 2|^2 < 9$

são: $2i$; $-2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$

Resposta: $2i$; $-2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$

23

Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Resolução

1) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow f(-x) = \ln(x^2 - x + 1)$

2) $f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(-x) = g(-x) + h(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-x) = -g(x) + h(x)$, *pois g é função ímpar e h é função par.*

Como $f(x) = g(x) + h(x)$ *e* $f(-x) = -g(x) + h(x)$, *temos:*

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) + \ln(x^2 - x + 1)}{2} \text{ e}$$

$$g(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 - x + 1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \ln\sqrt{(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)} \text{ e}$$

$$g(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}},\ x \in \mathbb{R}$$

Resposta: $h(x) = \ln\sqrt{(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)}$ *e*

$$g(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}},\ x \in \mathbb{R}$$

24

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio p(x) dado por $x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$.

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de p(x).

Resolução

Para que o polinômio

$p(x) = x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$ tenha $x = 0$ como raiz com multiplicidade 3, devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \\ \alpha - \beta - \gamma = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta - 2\gamma \neq 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \neq -2\gamma \\ \beta = 1 - \gamma \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma \neq -1 \\ \beta = 1 - \gamma \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Se $\gamma = m \neq -1$, temos: $\alpha = 0$, $\beta = 1 - m$ e $\gamma = m$

Resposta:
$\alpha = 0$, $\beta = 1 - m$ e $\gamma = m$, com $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq -1$

25

Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Resolução

Seja $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

I) Se A é simétrica, devemos ter:

$$A = A^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = z$$

II) Se A é ortogonal, vem:

$$A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \Leftrightarrow I = A \cdot A^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xz + yw \\ xz + yw & z^2 + w^2 \end{pmatrix}.$$

Como $y = z$, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy + yw = 0 \\ w^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 - y^2} \\ y = 0 \text{ ou } x = -w \\ w = \pm\sqrt{1 - y^2} \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

III) Para $y = 0$, temos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ou* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ou $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *ou* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

IV) Para $x = -w$, temos: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - y^2} & y \\ y & -\sqrt{1 - y^2} \end{pmatrix}$

ou $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - y^2} & y \\ y & \sqrt{1 - y^2} \end{pmatrix}$ *e* $|y| \leq 1$

26

Determine todos os valores $\alpha \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[4]{3}\, x^2 + tg\, \alpha = 0$$

admita apenas raízes reais simples.

Resolução

A equação $x^4 - 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot x^2 + tg\, \alpha = 0$, com $x^2 = y$, resulta: $y^2 - 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot y + tg\, \alpha = 0$.

A equação em x admite apenas raízes reais simples quando a equação em y admitir raízes reais distintas e estritamente positivas, o que ocorre nas seguintes condições:

I) $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2 \cdot \sqrt[4]{3})^2 - 4\, tg\, \alpha > 0 \Leftrightarrow tg\, \alpha < \sqrt{3}$

II) $P = \dfrac{C}{A} = tg\, \alpha > 0$

Assim: $0 < tg\, \alpha < \sqrt{3}$, no intervalo $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

resulta $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

27

Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos A, B e C tais que:

$P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes,

$P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que

$P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C | A \cap B)$ e $P(C | A \cap B^C)$.

Resolução

1) Se A e B são eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2) $P(C|A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}$

3) $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) +$

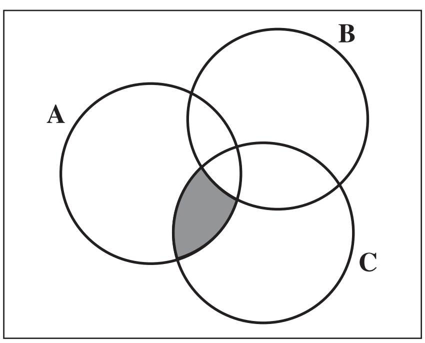
$+ P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{4} + P(A \cap C) - \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow P(A \cap C) = \dfrac{9}{80}$

4) Observe, pelo diagrama abaixo, que
$n(C \cap A \cap B^C) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$ *e, portanto:*

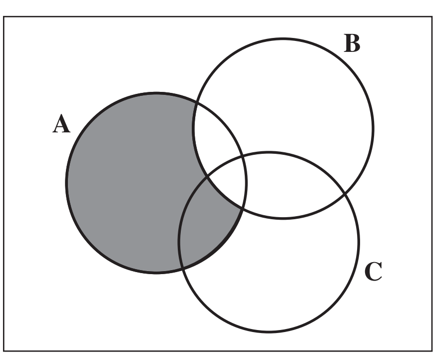
$P(C \cap A \cap B^C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$

$= \dfrac{9}{80} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{4}{80} = \dfrac{1}{20}$



5) Observe, pelo diagrama seguinte, que:
$n(A \cap B^C) = n(A) - n(A \cap B)$ *e, portanto:*

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$



6) $P(C|A \cap B^C) = \dfrac{P(C \cap A \cap B^C)}{P(A \cap B^C)} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{5}$

Respostas: $P(C|A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ e

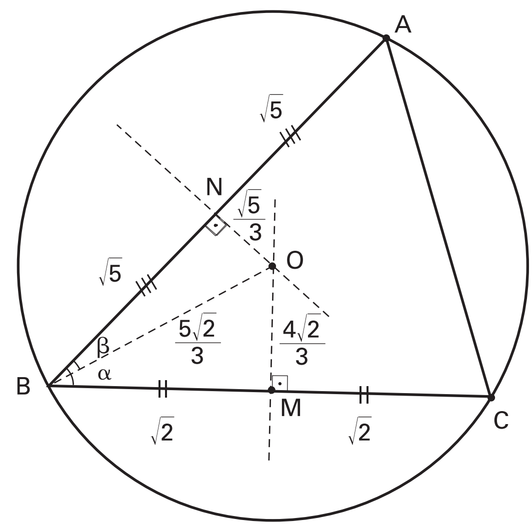
$P(C|A \cap B^C) = \dfrac{1}{5}$

28

Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

Resolução

Com os dados do enunciado, podemos montar a seguinte figura:



1) $sen\ \alpha = \dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{4}{5}$

2) $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{3}{5}$

3) $sen\ \beta = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

4) $cos\ \beta = \dfrac{\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

5) $sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \beta\ cos\ \alpha$

Assim: $sen(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{10} + \dfrac{\sqrt{10}}{10} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

6) A área S do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot \text{sen}\,(\alpha + \beta)}{2}$$

Assim: $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow S = \frac{120}{20} \Leftrightarrow$

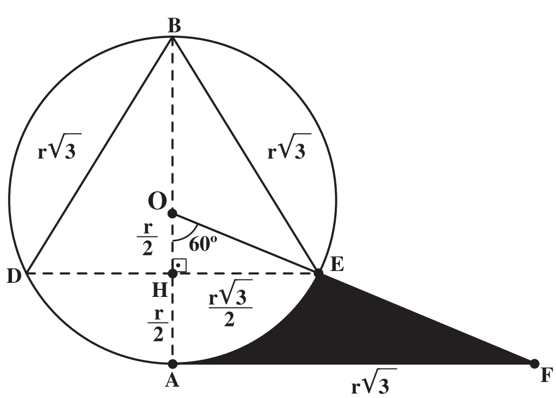
$\Leftrightarrow S = 6$

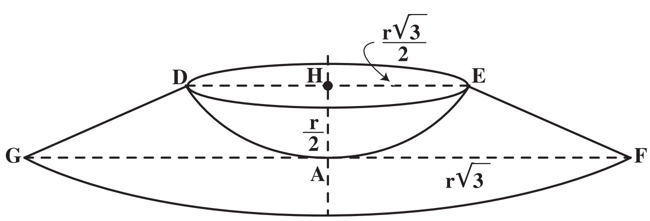
Resposta: 6 unidades de área

29

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e $\overline{AB}$ um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\widehat{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Resolução





O volume V do sólido gerado é dado por: $V = V_1 - V_2$, *onde* V_1 *é o volume de um tronco de cone circular reto de raios das bases* $r\sqrt{3}$ *e* $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ *e altura* $\frac{r}{2}$, *e* V_2 *é o volume de um segmento circular de raio da base* $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ *e altura* $\frac{r}{2}$.

Assim sendo, tem-se:

$$1)\ V_1 = \frac{\pi r}{6}\left[\left(r\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + r\sqrt{3}\,.\,\frac{r\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{7\pi r^3}{8}$$

$$2)\ V_2 = \frac{\pi r}{12}\left[3\,.\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{5\pi r^3}{24}$$

$$3)\ V = V_1 - V_2 \Leftrightarrow V = \frac{7\pi r^3}{8} - \frac{5\pi r^3}{24} \Leftrightarrow V = \frac{16\pi r^3}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^3}{3}$$

Resposta : $\frac{2\pi r^3}{3}$ *unidades de volume*

30

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2, 5), (–1, 2) e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2, 5).

Resolução

Sabendo-se que a, b, c (nessa ordem) estão em P.A. e que a parábola passa pelos pontos (2, 5) e (–1, 2), conclui-se que:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Assim, a equação da parábola é $y = -x^2 + 2x + 5$, *cujo vértice tem coordenadas V (1; 6).*

$$\text{Se } y' = \frac{dy}{dx} = -2x + 2 \text{ e } m_t = f'(2) = -2\,.\,2 + 2 = -2$$

é o coeficiente angular da reta tangente no ponto (2, 5), então a reta tangente nesse ponto resulta:

$y - 5 = -2\,.\,(x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0$

A distância do vértice V (1, 6) à reta $2x + y - 9 = 0$ *é:*

$$d = \frac{|2\,.\,1 + 6 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Resposta : $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$