

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Z} : conjuntos dos números inteiros

\mathbb{Q} : conjuntos dos números racionais

\mathbb{R} : conjuntos dos números reais

\mathbb{C} : conjuntos dos números complexos

i : unidade imaginária; $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

\bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$Re z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$

$Im z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$

$\binom{n}{p}$: número de combinações de n elementos tomados p a p .

$\text{mdc}(j, k)$: máximo divisor comum dos números inteiros j e k .

$n(X)$: número de elementos de um conjunto finito X .

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 01. Se A, B, C forem conjuntos tais que

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= 23, & n(B - A) &= 12, & n(C - A) &= 10, \\n(B \cap C) &= 6 \text{ e } n(A \cap B \cap C) &= 4,\end{aligned}$$

então $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

A () formam uma progressão aritmética de razão 6.

B () formam uma progressão aritmética de razão 2.

C () formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

D () formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

E () não formam uma progressão aritmética.

Questão 02. Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

A () $2^8 - 9$. **B** () $2^8 - 1$. **C** () $2^8 - 2^6$. **D** () $2^{14} - 2^8$. **E** () 2^8 .

Questão 03. Considere a equação:

$$16 \left(\frac{1 - ix}{1 + ix} \right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i} \right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

A () 3. **B** () 6. **C** () 9. **D** () 12. **E** () 15.

Questão 04. Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i \cotg x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A () $|\cos x|$

B () $(1 + \operatorname{sen} x)/2$

C () $\cos^2 x$

D () $|\operatorname{cosec} x|$

E () $|\operatorname{sen} x|$

Questão 05. Considere: um retângulo cujos lados medem B e H , um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H , e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

A () $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0.$

B () $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0.$

C () $\pi^3 x^3 - \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0.$

D () $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

E () $x^3 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Questão 06. Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r , então r pertence ao intervalo

A () $(0, (1 + \sqrt{2})/2).$

B () $\left((1 + \sqrt{2})/2, \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2} \right).$

C () $\left(\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}, (1 + \sqrt{5})/2 \right).$

D () $\left((1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2 \right).$

E () $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, (2 + \sqrt{3})/2 \right).$

Questão 07. Sejam x , y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\log_k(xy) = 49,$$

$$\log_k(x/z) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

A () 52.

B () 61.

C () 67.

D () 80.

E () 97.

Questão 08. Sejam x e y dois números reais tais que e^x , e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

A () 0.

B () 1.

C () $2\log_5 3.$

D () $\log_5 2.$

E () $3\log_e 2.$

Questão 09. Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

- A () 9. B () 7. C () 5. D () 3. E () 1.

Questão 10. Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

- A () 104. B () 114. C () 124. D () 134. E () 144.

Questão 11. Sobre a equação na variável real x ,

$$|| |x - 1| - 3| - 2| = 0,$$

podemos afirmar que

- A () ela não admite solução real.
 B () a soma de todas as suas soluções é 6.
 C () ela admite apenas soluções positivas.
 D () a soma de todas as soluções é 4.
 E () ela admite apenas duas soluções reais.

Questão 12. Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

- A () 204 B () 206 C () 208 D () 210 E () 212

Questão 13. Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sqrt{3} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) \sec(x) \geq 0.$$

- A () $\pi/2$ B () $\pi/3$ C () $\pi/4$ D () $\pi/6$ E () $\pi/12$

Questão 14. Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{ x_k = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \pi}{24} \right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{(3k+5)\pi}{24} \right) : k = 1, 2 \right\}.$$

- A () 0 B () 1 C () 2
 D () $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) / 3$ E () $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) / 3$

Questão 15. Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B , definidos por

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \quad \text{quando } j \geq k, \quad a_{jk} = \binom{k}{j}, \quad \text{quando } j < k$$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n \times n$ é definido por $\sum_{p=1}^n c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

A () $n(n-1)/3$. **B** () $(n-1)(n+1)/4$. **C** () $(n^2 - 3n + 2)/(n-2)$.

D () $3(n-1)/n$. **E** () $(n-1)/(n-2)$.

Questão 16. Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

A () $15/2$. **B** () $13/4$. **C** () $11/6$. **D** () $9/4$. **E** () $7/2$.

Questão 17. Sejam $A : (a, 0)$, $B : (0, a)$ e $C : (a, a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P : (x, y)$ cuja distância à reta que passa por A e B , é igual à distância de P ao ponto C .

A () $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

B () $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

C () $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

D () $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

E () $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Questão 18. Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n . O valor de n para o qual valem as desigualdades

$$b_n \leq a_n \quad \text{e} \quad b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

A () $3 < n < 7$.

B () $6 < n < 9$.

C () $8 < n < 11$.

D () $10 < n < 13$.

E () $12 < n < 15$.

Questão 19. Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R . Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2 , então a razão A_1/A_2 é igual a

A () $\sqrt{5/8}$.

B () $9\sqrt{2}/16$.

C () $2(\sqrt{2} - 1)$.

D () $(4\sqrt{2} + 1)/8$.

E () $(2 + \sqrt{2})/4$.

Questão 20. Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

- A** () $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. **B** () $(\sqrt{6} - \sqrt{3})/3$. **C** () $(3\sqrt{3} - \sqrt{6})/21$.
D () $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})/6$. **E** () $(2\sqrt{6} - \sqrt{2})/22$.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Determine o conjunto C , sendo A , B e C conjuntos de números reais tais que

$$\begin{aligned}
 A \cup B \cup C &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 2\}, \\
 A \cup B &= \{x \in \mathbb{R} : 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\}, \\
 A \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : \log(x+4) \leq 0\}, \\
 B \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x + 7 < 2\}.
 \end{aligned}$$

Questão 22. Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\bar{z}}{z - 2i} + \frac{2z}{\bar{z} + 2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z - 2i| \leq 1.$$

Questão 23. Seja k um número inteiro positivo e

$$A_k = \{j \in \mathbb{N} : j \leq k \text{ e } \text{mdc}(j, k) = 1\}.$$

Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Questão 24. Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

- (a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
 (b) Determine todas essas raízes reais.

Questão 25. Sendo x , y , z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\log [(x + 2y)(w - 3z)^{-1}] = 0,$$

$$2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0,$$

$$\sqrt[3]{2x + y + 6z - 2w} - 2 = 0.$$

Questão 26. Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Questão 27. Considere um triângulo isósceles ABC , retângulo em B . Sobre o lado \overline{BC} , considere, a partir de B , os pontos D e E , tais que os comprimentos dos segmentos \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{DE} , \overline{EC} , nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo \widehat{EAD} , determine $\operatorname{tg} \beta$ em função da razão r da progressão.

Questão 28. Considere, no plano cartesiano xy , duas circunferências C_1 e C_2 , que se tangenciam exteriormente em $P : (5, 10)$. O ponto $Q : (10, 12)$ é o centro de C_1 . Determine o raio da circunferência C_2 , sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação $x = y$.

Questão 29. Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h . Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2 , que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Questão 30. Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3 \text{ cm}^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.