NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
$\emptyset$: conjunto vazio
$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$
detA : determinante da matriz A
A^{-1}: inversa da matriz A
$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b, onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
P(X) : conjunto de todos os subconjuntos de X
n(X) : número de elementos do conjunto X (X finito)
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Rez : parte real de $z \in \mathbb{C}$
Imz: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

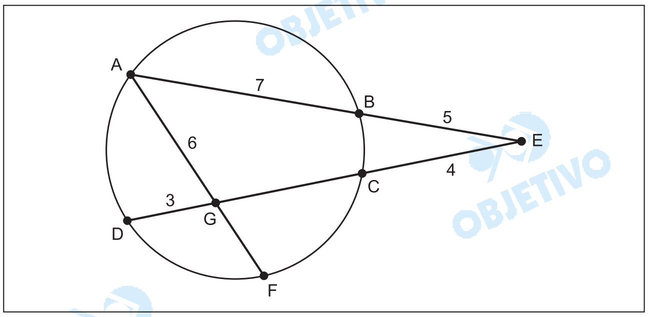
Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados.

1 D

Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução



1) Pela potência do ponto E tem-se:

$EA \cdot EB = EC \cdot ED \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \cdot 5 = 4 \cdot (4 + 3 + GC) \Leftrightarrow GC = 8$

2) Pela potência do ponto G tem-se:

$GA \cdot GF = GC \cdot GD \Leftrightarrow 6 \cdot GF = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow GF = 4$

2 C

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de P(U) com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

a) 2^{n-1}

b) n/2, se n for par, e (n + 1)/2 se n for ímpar

c) n + 1

d) $2^n - 1$

e) $2^{n-1} + 1$

Resolução

1) Se $S \subset P(U)$, qualquer elemento $X_i \in S$ é subconjunto de U.

2) Se $X_i \neq \varnothing$ for o elemento de S com menor número de elementos, qualquer outro elemento de S deverá conter X_i.

3) Assim, o conjunto S terá o maior número de elementos quando for do tipo
$S = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_1; a_2\}, \{a_1; a_2; a_3\}, \ldots, \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}\}$
em que $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\} = U$

Desta forma, S possui um máximo de n + 1 elementos.

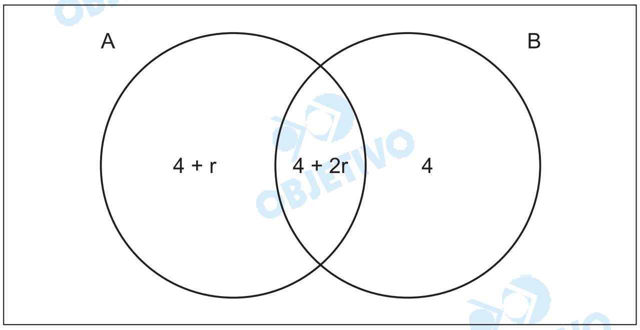
3 B

Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que n(B\A), n(A\B) e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que n(B\A) = 4 e $n(A \cup B) + r = 64$, então, n(A\B) é igual a

a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

Resolução

De acordo com os dados, tem-se o seguinte diagrama de Venn-Euler:



pois n(B\A), n(A\B) e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de primeiro termo 4 e razão $r > 0$.

Assim, tem-se que:

$n(A \cap B) + r = 64 \Leftrightarrow [(4 + r) + (4 + 2r) + 4] + r = 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12 + 4r = 64 \Leftrightarrow r = 13$ *e*

$n(A \backslash B) = n(A - B) = 4 + r = 4 + 13 = 17$

4 E

Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $\sqrt{77}$sen[5(x + π/6)] e seja B o conjunto dado por B = {x ∈ $\mathbb{R}$: f(x) = 0}. Se m é o maior elemento de B ∩ (–∞,0) e n é o menor elemento de B ∩ (0, +∞), então m + n é igual a

a) 2π/15 b) π/15 c) –π/30
d) –π/15 e) –2π/15

Resolução

1) *Com* $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$f(x) = \sqrt{77} \,.\, sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k\pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} \quad e\ B = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5}\ ; k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $B \cap (-\infty,0) = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{-11\pi}{30}; \frac{-17\pi}{30}; \frac{-23\pi}{30}; \dots\right\}$

cujo maior elemento é $m = -\frac{\pi}{6}$

3) $B \cap (0, +\infty) = \left\{\frac{\pi}{30}; \frac{7\pi}{30}; \frac{13\pi}{30}; \frac{19\pi}{30}; \dots\right\}$,

cujo menor elemento é $n = \frac{\pi}{30}$.

4) *Dos itens (2) e (3) conclui-se*

$$m + n = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = -\frac{2\pi}{15}$$

5 C

Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

a) (-1,0) ∪ (0,1) b) (–∞,–1) ∪ (1,+∞) c) (–1,1)
d) (0,∞) e) (–∞,+∞)

Resolução

1) $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m \Leftrightarrow a^x - a^{-x} = m\,a^x + m\,a^{-x}$

$$\Leftrightarrow (m-1)\,.\,a^x + (m+1)a^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\,.\,a^{2x} + (m+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{2x} = \frac{-m-1}{m-1} \Leftrightarrow a^{2x} = \frac{1+m}{1-m}$$

Para $0 < a \neq 1,\ a^{2x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{1-m} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+m)(1-m) > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4.30$ b) $4^3.60$ c) $5^3.60$ d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.4^3$ e) $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

Resolução

Interpretando "o número de formas possíveis para que o candidato acerte somente 7 questões" como sendo "o número de maneiras de escolher uma alternativa para cada um dos 10 testes de modo que apenas 7 deles estejam corretos", então:

1) *O número de possibilidades de acertar exatamente 7 testes é* $C_{10,7}$.

2) *Para cada uma das possibilidades anteriores, as 3 questões erradas podem ser escolhidas de*

   $4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^3$ *maneiras.*

3) *O número total de possibilidades será, então,*

$$C_{10,7} \,.\, 4^3 = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} \,.\, 4^3 = 30 \,.\, 4 \,.\, 4^3 = 30 \,.\, 4^4$$

Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 (4^k \sqrt{2})$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita

II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3

II. S = 3451

IV. $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e III b) II e III c) II e IV d) II e) III

Resolução

$$S = \sum_{k=0}^{101} \log_8(4^k \cdot \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \log_8(4^0 \cdot \sqrt{2}) + \log_8(4^1 \cdot \sqrt{2}) + $$
$$+ \log_8(4^2 \cdot \sqrt{2}) + \ldots + \log_8(4^{101} \cdot \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{202}{3}\right)$$

Assim sendo

1) S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão $\frac{2}{3}$.

2) O valor de S é:

$$S = \frac{\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} + \frac{202}{3}\right)}{2} \cdot 102 = \frac{203}{6} \cdot 102 = 3451$$

3) $S = 3451 > 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

As afirmações verdadeiras são, apenas, II e III.

Obs.: *A rigor sempre é possível obter uma progressão geométrica cuja soma S = 3451 o que tornaria a afirmação (I) verdadeira.*

8 C

Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

a) 1 b) 2z c) 2Rez d) 2Imz e) $2|z|^2$

Resolução

1) $|f(z)| = |z| \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(z)}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(z)}{z} = \cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(z) = z\,(\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta),\ \forall\, z \in \mathbb{C}^*$

2) $f(z) = z \,.\, (\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta)$ também é verdadeira para $z = 0$, pois $f(0) = 0 \,.\, (\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta) = |0|$

3) A função $f(z) = z\,(\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta)$ satisfaz a condição $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, pois

$|f(z) - f(1)| = |z\,(\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta) - 1 \,.\, (\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta)| =$

$= |z - 1| \,.\, |\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta| = |z - 1|$

4) $\overline{f(z)} = \overline{z}\,(\cos\theta - i \,.\, \text{sen}\,\theta)$

5) $f(1) = 1 \,.\, (\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta)$ e $\overline{f(1)} = 1(\cos\theta - i \,.\, \text{sen}\,\theta)$

6) $\overline{f(1)} \,.\, f(z) = 1\,(\cos\theta - i \,.\, \text{sen}\,\theta) \,.\, z\,(\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta)$

7) $f(1) \,.\, \overline{f(z)} = 1 \,.\, (\cos\theta + i \,.\, \text{sen}\,\theta) \,.\, \overline{z}\,(\cos\theta - i \,.\, \text{sen}\,\theta)$

8) $\overline{f(1)} \,.\, f(z) + f(1) \,.\, \overline{f(z)} = (z + \overline{z})\,(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) =$

$= z + \overline{z} = 2\,\text{Re}(z)$

9 D

O conjunto solução de $(\text{tg}^2x - 1)(1 - \text{cotg}^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

a) $\{\pi/3 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{\pi/4 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{\pi/6 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{\pi/8 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\{\pi/12 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Resolução

Para $x \neq k\,\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$(\text{tg}^2x - 1)\,(1 - \text{cotg}^2x) = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(\text{sen}^2x - \cos^2x)}{\cos^2x} \,.\, \frac{(\text{sen}^2x - \cos^2x)}{\text{sen}^2x} = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\text{sen}^2x - \cos^2x)^2 = 4\,\text{sen}^2\,x\,\cos^2\,x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\,(2x) = \text{sen}^2\,(2x) \Leftrightarrow \text{tg}^2\,(2x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,(2x) = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k \,.\, \frac{\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \,.\, \frac{\pi}{4},\ (k \in \mathbb{Z})$$

O conjunto-solução da equação é:

$$\left\{\frac{\pi}{8} + k \,.\, \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

10 B

Se $\alpha \in [0,2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

a) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π

b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π

c) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$

d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2

e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

Resolução

1) Lembrando que $z = |z| \cdot [\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha]$, tem-se que:

$$\frac{z}{|z|} = [\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{|z|}\right)^n = [\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha]^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{|z|}\right)^n = \cos(n\alpha) + i \text{ sen } (n\alpha) = i \text{ sen } (n\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ (I)}$$

2) Da relação (I), conclui-se:

***A é falsa**, pois*

$2n\alpha = \pi + 2k\pi = \pi(1 + 2k)$, que não é "múltiplo" de 2π.

***B é verdadeira**, pois*

$2n\alpha - \pi = 2k\pi$, que é "múltiplo" de 2π.

***C é falsa**, pois*

$n\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, que não é "múltiplo" de $\dfrac{\pi}{2}$.

***D é falsa**, pois*

$2n\alpha - \pi = 2k\pi$, que só seria "múltiplo" de 2 se $k\pi \in \mathbb{Z}$, o que só ocorre para $k = 0$.

***E é falsa**, pois*

$n\alpha - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2} + k\pi$, que não é "múltiplo" de π.

11 A

A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases} \quad \text{é}$$

a) $a - b \neq 2$ b) $a + b = 10$ c) $4a - 6b = 0$
d) $a/b = 3/2$ e) $a \, . \, b = 24$

Resolução

Sendo p a característica da matriz incompleta e q a característica da matriz completa, associadas ao sistema, temos:

1) $MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p = 2 \text{ para } a = 6 \text{ e} \\ p = 3 \text{ para } a \neq 6 \end{matrix}$

2) *O sistema é incompatível quando $p \neq q$ e, portanto, devemos ter: $p = 2$ e $q = 3$.*
Assim, para $a = 6$, teremos:

$MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & b \end{bmatrix}$ e $q = 3$ para $b \neq 4$

Logo, $a - b \neq 2$.

12 D

Se $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do

$\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

Resolução

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \, . \, 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -6 \, . \, 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12 \, . \, (-1) = 12$$

Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1 – i como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e – 40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

a) $3/2 - \sqrt{193}/6$, 3, $3/2 + \sqrt{193}/6$

b) $2 - 4\sqrt{13}$, 2, $2 + 4\sqrt{13}$

c) – 4, 2, 8

d) – 2, 3, 8

e) – 1, 2, 5

Resolução

Se um polinômio p de grau 7 com coeficientes reais, admite (1 – i) como raiz de multiplicidade 2, então, também admite (1 + i) como raiz de multiplicidade 2.

*Sendo $\alpha - r$, α, $\alpha + r$, com α e r números reais, as outras três raízes de **p**, temos*

$$\begin{cases} (1-i) + (1-i) + (1+i) + (1+i) + (\alpha - r) + \alpha + (\alpha + r) = 10 \\ (1-i)\,(1-i)\,(1+i)\,(1+i)\,(\alpha - r)\,\alpha(\alpha + r) = -40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 4 \,.\, (\alpha^2 - r^2) \,.\, \alpha = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ r = \pm 3 \end{cases}$$

Dessa forma as três raízes reais de p são – 1, 2 e 5.

Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

a) $x = 2$ não é raiz de p

b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais

c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira

d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras

e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

Resolução

1) $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(2) = 32 - 40 + 16 - 6 - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(2) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2$ *é raiz de p* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(x)$ *é divisível por* $x - 2$

2)
$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -5 & 4 & -3 & -2 & 2 \\ \hline & & & & & & 1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r|l} p(x) & x - 2 \\ \hline & \\ 0 & x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p(x) = (x - 2)\,(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$

3) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ *ou* $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$

4) $x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 2$

5) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

6) *Se* $x + \dfrac{1}{x} = y$, *então* $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

7) *Substituindo* $x + \dfrac{1}{x}$ *por y, temos:*

$(y^2 - 2) + 2y - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ y = -3$ *ou* $y = 1$

8) *Se* $y = -3$, *então* $x + \dfrac{1}{x} = -3 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + 3x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

9) Se $y = 1$, então $x + \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

10) O conjunto-verdade da equação $p(x) = 0$ é

$$\left\{2;\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$$

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a-b)x - (a+b)y = 1 \\ (a+b)x + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$

II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos

III. $x^2+y^2 = (a^2+b^2)^{-1}$, se $a^2+b^2 \neq 0$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

Resolução

$$\begin{cases} (a-b)\,x - (a+b)\,y = 1 \\ (a+b)\,x + (a-b)\,y = 1 \end{cases}$$

1) A matriz incompleta MI = $\begin{bmatrix} (a-b) & -(a+b) \\ (a+b) & (a-b) \end{bmatrix}$

não tem característica definida, se $a = b = 0$ e tem característica 2, se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, pois

$$\begin{vmatrix} (a-b) & -(a+b) \\ (a+b) & (a-b) \end{vmatrix} = (a-b)^2 + (a+b)^2 =$$

$$= 2\,(a^2+b^2) \neq 0$$

2) A matriz completa MC = $\begin{bmatrix} (a-b) & -(a+b) & 1 \\ (a+b) & (a-b) & 1 \end{bmatrix}$

tem característica 1 se $a = b = 0$ e tem característica 2, se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

3) Dos itens (1) e (2), pelo Teorema de Rouché-Capelli, conclui-se que:
se $a = b = 0$, o sistema é impossível e
se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

Neste caso, tem-se:

$$\begin{cases} (a-b)\,x - (a+b)\,y = 1 \\ (a+b)\,x + (a-b)\,y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2\,x^2 - 2\,(a-b)\,(a+b)\,xy + (a+b)^2\,y^2 = 1 \\ (a+b)^2\,x^2 + 2\,(a+b)\,(a-b)\,xy + (a-b)^2\,y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a^2+2b^2)\,x^2 + (2a^2+2b^2)\,y^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)(x^2+y^2) = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = (a^2+b^2)^{-1}$$

Desta forma, (I) é falsa, (II) e (III) são verdadeiras.

16 D

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a + 1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio p(x) só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$
b) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$
c) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$
d) $\{n(n + 1), n \in \mathbb{N}\}$
e) $\mathbb{N}$

Resolução

1) $p(x) = x^3 - (a + 1)\,x + a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(x) = x^3 - x^2 + x^2 - ax - x + a = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(x) = x^2(x - 1) + x\,(x - 1) - a\,(x - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ p(x) = (x - 1)\,(x^2 + x - a)$

2) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 + x - a = 0$

3) *As raízes da equação* $x^2 + x - a = 0$ *serão reais se, e somente se,* $\Delta = 1 + 4\,a \geq 0$

4) $1 + 4\,a \geq 0$ e $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N}$

5) *Para* $a \in \mathbb{N}$, *se as raízes inteiras forem* ***m*** *e* ***n*** *então*

$$\begin{cases} m + n = -1 \\ m\,.\,n = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 - n \\ (-1-n)\,.\,n = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -n - 1 \\ a = n(n + 1) \end{cases}$$

6) *As raízes inteiras serão, portanto,* **1**, ***n*** *e* ***–n–1*** *desde que* $a = n(n + 1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

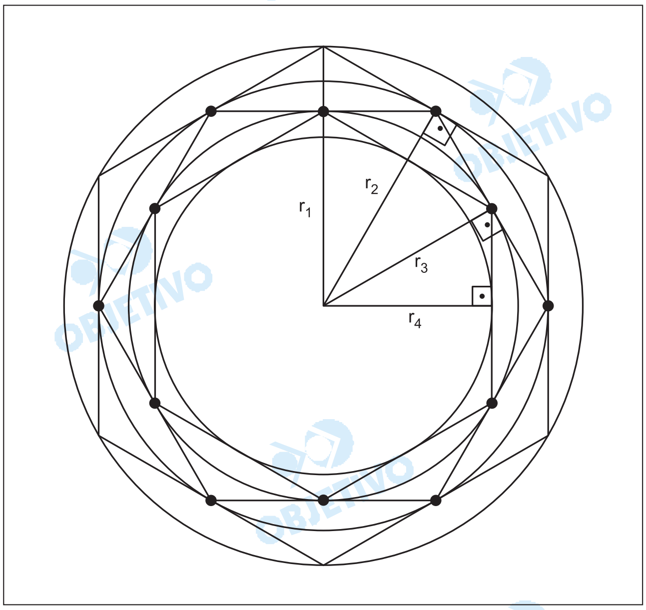
17 B

Numa circunferência C_1 de raio $r_1 = 3$ cm está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a

a) $54\sqrt{2}$ b) $54\sqrt{3}$ c) $36(1 + \sqrt{3})$

d) $27 / (2 - \sqrt{3})$ e) $30(2 + \sqrt{3})$

Resolução



De acordo com o enunciado e a figura acima tem-se:

$r_1 = 3$ cm

$$r_2 = \frac{r_1\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$r_3 = \frac{r_2\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ cm}$$

$$r_4 = \frac{r_3\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \text{ cm}$$

……

conclui-se assim que os raios $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ formam nessa ordem uma progressão geométrica estritamente decrescente de 1º termo $r_1 = 3$ cm e razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que as áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ formam

nessa ordem uma progressão geométrica estritamente decrescente de 1º termo $A_1 = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 e razão

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Logo: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-Q} =$

$$= \frac{6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = 54\sqrt{3}$$

18 sem resposta

Sejam a reta s: $12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

a) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$ b) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$

c) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$ d) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$

e) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

Resolução

A circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 = 0$ *tem centro* $C(-2; -1)$ *e raio* $r = 4$.

A reta ***p****, perpendicular a* ***s****, tem equação* $5x + 12y + k = 0$ *e será secante à circunferência quando* $d_{p,C} < 4$*, isto é:*

$$\frac{|5 \cdot (-2) + 12 \cdot (-1) + k|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} < 4 \Leftrightarrow \frac{|k - 22|}{13} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k - 22| < 52 \Leftrightarrow -52 < k - 22 < 52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30 < k < 74$$

A reta ***p*** *intercepta o eixo Oy num ponto cuja ordenada é* $\frac{-k}{12}$.

Assim, se $-30 < k < 74$*, então* $-74 < -k < 30$ *e*

$$\frac{-74}{12} < \frac{-k}{12} < \frac{30}{12}$$

A ordenada do ponto em que a reta ***p*** *corta o eixo Oy pertence ao intervalo* $\left(-\frac{74}{12}; \frac{30}{12}\right)$.

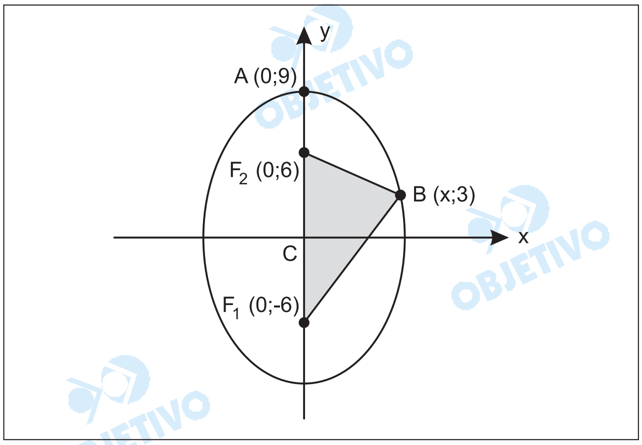
19 D

Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0,6)$. Os pontos $A(0,9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

a) $22\sqrt{10}$ b) $18\sqrt{10}$ c) $15\sqrt{10}$
d) $12\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

Resolução

A partir do enunciado, temos uma elipse com centro na origem e com pontos indicados na figura a seguir.



$$\text{Como } f = \frac{F_1F_2}{2} = 6,\ a = CA = 9 \text{ e } a^2 = b^2 + f^2,$$

$$\text{temos: } 9^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow b^2 = 45$$

$$\text{A equação da elipse é: } \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1$$

Se B(x; 3), com x > 0, pertence à elipse, então:

$$\frac{x^2}{45} + \frac{3^2}{81} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 40 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{10} \text{ (pois } x > 0)$$

Finalmente, a área do triângulo é:

$$A = \frac{F_1F_2 \cdot x_B}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 12\sqrt{10}$$

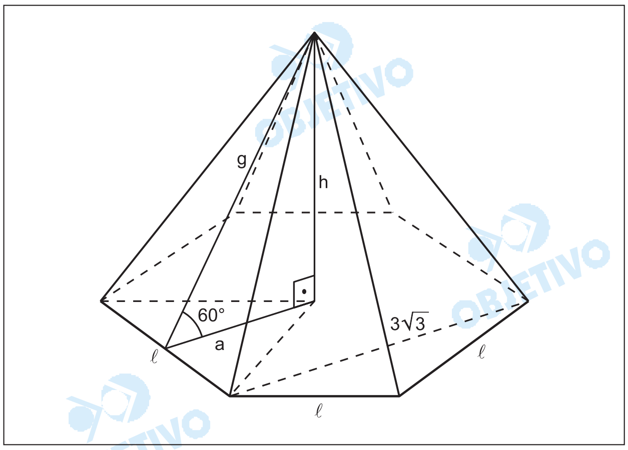
20 A

Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

a) $81\sqrt{3}/2$ b) $81\sqrt{2}/2$ c) $81/2$

d) $27\sqrt{3}$ e) $27\sqrt{2}$

Resolução



Sejam ℓ a medida do lado da base, ***g*** *a medida do apótema da pirâmide,* ***a*** *a medida do apótema da base, em centímetros.*

1º) $2 \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \ell = 3$

2º) $a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

3º) $\cos 60° = \dfrac{a}{g} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{g} \Leftrightarrow g = 3\sqrt{3}$

4º) *A área, em centímetros quadrados, da superfície lateral da pirâmide é dada por:*

$$A_\ell = 6 \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} = 3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

5º) *A área, em centímetros quadrados, da base da pirâmide é dada por:*

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

6º) *A área total, em centímetros quadrados, dessa pirâmide é*

$$A_t = A_\ell + A_b = 27\sqrt{3} + \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21

Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset P(A)$ é uma **partição de** A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$

II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i,j = 1, \ldots, m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição **de ordem** k se $n(A_i) = k$, $i = 1, \ldots, m$.

Supondo que $n(A) = 8$, determine:

a) As ordens possíveis para uma partição de A

b) O número de partições de A que têm ordem 2

Resolução

a) *Dizer que F é uma* ***partição de ordem k*** *significa dizer que todos os conjuntos A_i que compõem a partição possuem k elementos distintos.*

Como, de $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$ e

$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, para $i,j = 1, \ldots, n$, resulta em

$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m)$, tem-se

$$8 = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{m \text{ parcelas}} \Leftrightarrow 8 = m \,.\, k \Leftrightarrow$$

*$\Leftrightarrow$ k e m são divisores naturais de **8**.*

Assim, podemos ter (k = 1 e m = 8) ou (k = 2 e m = 4) ou (k = 4 e m = 2) ou (k = 8 e m = 1).

Desta forma, as possíveis ordens para uma partição de A são 1, 2, 4 e 8.

b) *Determinar o número de partições de A que têm ordem 2 equivale a determinar de quantas maneiras se podem distribuir os* ***8 elementos*** *de A em 4 grupos de 2 elementos cada um. O número de formas de se efetuar estas partições é*

$$\frac{C_{8;\,2} \,.\, C_{6;\,2} \,.\, C_{4;\,2} \,.\, C_{2;2}}{P_4} = \frac{\dfrac{8.7}{2!} \,.\, \dfrac{6.5}{2!} \,.\, \dfrac{4.3}{2!} \,.1}{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.1} =$$

$$= \frac{28 \,.\, 15 \,.\, 6 \,.\, 1}{24} = 105$$

Respostas: *a) ordens 1, 2, 4 e 8*

b) 105 partições

Seja f: [0, 1) → ℝ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}.$$

Seja g: (– 1/2; 1/2) → ℝ dada

$$g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$$, com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Resolução

$$1) \begin{cases} f(x) = 2x, \text{ se } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ e \\ f(x) = 2x - 1, \text{ se } \dfrac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$2) -\frac{1}{2} < x < 0 \Leftrightarrow 0 < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \text{ e } 0 \le x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x + \frac{1}{2} < 1$$

$$3) \begin{cases} g(x) = f(x + \dfrac{1}{2}), \text{ se } -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ e \\ g(x) = 1 - f(x + \dfrac{1}{2}), \text{ se } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2\,(x + \dfrac{1}{2}), \text{ se } -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ e \\ g(x) = 1 - [2\,(x + \dfrac{1}{2}) - 1], \text{ se } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x + 1, \text{ se } -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ e \\ g(x) = -2x + 1, \text{ se } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(-x) = g(x), \forall x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \Leftrightarrow g \text{ é par}$$

Resposta: *g(x) é par*

23

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

Resolução

$$(1 + x + x^2)^9 = [(1 + x) + x^2]^9 = \binom{9}{0} . (1 + x)^9 . (x^2)^0 +$$
$$+ \binom{9}{1} . (1 + x)^8 . (x^2)^1 + \binom{9}{2} . (1 + x)^7 . (x^2)^2 +$$
$$+ \binom{9}{3} . (1 + x)^6 . (x^2)^3 + \ldots + \binom{9}{9} . (1 + x)^0 . (x^2)^9$$

Podemos notar que termos em x^4 só ocorrerão nos primeiros três termos do desenvolvimento acima.

Em $\binom{9}{0} . (1 + x)^9$, *temos* $\binom{9}{k_1} 1^{9 - k_1} . x^{k_1}$, *com* $k_1 = 4$

Em $\binom{9}{1} . (1 + x)^8 . x^2$, *temos*

$$9. \left[\binom{8}{k_2} 1^{8 - k_2} . x^{k_2}\right] . x^2, \text{ com } k_2 + 2 = 4 \Leftrightarrow k_2 = 2$$

Em $\binom{9}{2} . (1 + x)^7 . x^4$, *temos*

$$\binom{9}{2} . \left[\binom{7}{k_3} 1^{7 - k_3} . x^{k_3}\right] x^4, \text{ com } k_3 = 0$$

Assim, resulta a soma:

$$\binom{9}{k_1} + \binom{9}{1} . \binom{8}{k_2} + \binom{9}{2} . \binom{7}{k_3} =$$
$$= \binom{9}{4} + \binom{9}{1} . \binom{8}{2} + \binom{9}{2} . \binom{7}{0} =$$
$$= 126 + 9 . 28 + 36 = 414$$

Resposta: *O coeficiente de x^4 é 414.*

Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade

$\log_{\cos x}(4\text{sen}^2x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2$.

Resolução

As condições de existência dos logaritmos, para $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, *resultam:*

I) $0 < \cos x < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$

II) $4 \,.\, \text{sen}^2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x < -1/2$ ou $\text{sen}\, x > 1/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{2}$

III) $4 - \sec^2x > 0 \Leftrightarrow \sec^2x < 4 \Leftrightarrow -2 < \sec x < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < \dfrac{1}{\cos x} < 2 \Leftrightarrow \cos x > 1/2$ (pois $\cos x > 0$)

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$

Nas condições acima, temos:

$\log_{\cos x}(4 \,.\, \text{sen}^2x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2x) > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\cos x}\left(\dfrac{4 \,.\, \text{sen}^2x - 1}{4 - \sec^2x}\right) > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 \,.\, \text{sen}^2x - 1}{4 - \dfrac{1}{\cos^2x}} < \cos^2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 \,.\, \text{sen}^2x - 1}{4 \,.\, \cos^2x - 1} \,.\, \cos^2x < \cos^2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 \,.\, \text{sen}^2x - 1}{4 \,.\, \cos^2x - 1} < 1 \Leftrightarrow 4 \,.\, \text{sen}^2x - 1 < 4 \,.\, \cos^2x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2x < \cos^2x \Leftrightarrow \text{tg}^2x < 1 \Leftrightarrow -1 < \text{tg}\, x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

Impondo-se as condições de existência na solução obtida, resulta:

$-\dfrac{\pi}{4} < x < -\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4}$

Resposta: $-\dfrac{\pi}{4} < x < -\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4}$

25

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

Resolução

Sejam α, β e γ as raízes da equação e, sem perda de generalidade, admitamos que α é racional.

1) Se $\beta - \alpha = r_1 \in \mathbb{Q}$, então $\beta = r_1 + \alpha$ é racional e γ também é racional, pois $\alpha + \beta + \gamma = -a \in \mathbb{Q}$.
Se $\gamma - \alpha = r_2 \in \mathbb{Q}$, então $\gamma = r_2 + \alpha$ é racional e β também é racional, pois $\alpha + \beta + \gamma = -a \in \mathbb{Q}$.

2) Se $\beta - \gamma = r_3 \in \mathbb{Q}$, como $\alpha + \beta + \gamma = -a \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\begin{cases} \beta - \gamma = r_3 \\ \beta + \gamma = -\alpha - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{r_3 - \alpha - a}{2} \\ \gamma = -\left(\dfrac{r_3 + \alpha + a}{2}\right) \end{cases}$$

e ambas são racionais.

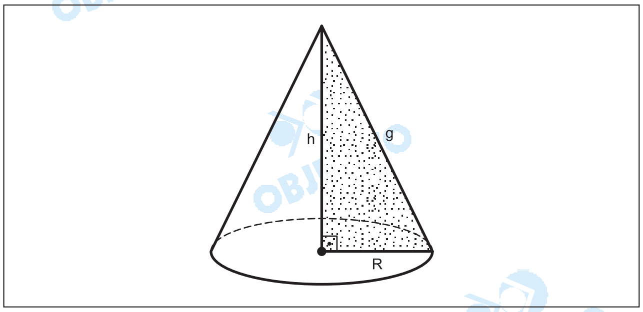
Desta forma, se uma raiz de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais e a frase apresentada é verdadeira.

Resposta: *verdadeira*

26

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Resolução



Sendo x a medida, em metros, da altura do cone, temos: $h = x$, $R = x - 2$, $g = x + 2$ e

$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 8$, pois $x > 0$

Assim, $h = 8m$, $R = 6m$ e $g = 10m$

A área total A_T do cone, em metros quadrados, é:

$A_T = \pi R^2 + \pi Rg = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$

Resposta: *$A_T = 96\pi\ m^2$*

27

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Resolução

1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2) $\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 3 . (-1)^2 . \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 . 33 = 99$

3) *Sendo A_{43} o cofator do elemento da 4ª linha e da 3ª coluna da matriz (A + B), temos:*

$A_{43} = (-1)^{4+3} . \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -18$

4) *O elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$ é tal que:*

$$c_{34} = \frac{A_{43}}{\det(A + B)} = -\frac{18}{99} = -\frac{2}{11}$$

Resposta: *O elemento c_{34} é igual a* $-\dfrac{2}{11}$

Seja ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$) uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de a + r.

Resolução

Sendo ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$) uma progressão geométrica infinita de razão positiva r e a_1 = a um número real não-nulo, de acordo com o enunciado, temos:

1) $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \,.\, r + a \,.\, r^3 + a \,.\, r^5 + \ldots = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a \,.\, r}{1 - r^2} = 4 \Leftrightarrow a \,.\, r = 4 \,.\, (1 - r^2) \quad (I)$$

2) $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = \dfrac{16}{13} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \,.\, r^2 + a \,.\, r^5 + a \,.\, r^8 + \ldots = \frac{16}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a \,.\, r^2}{1 - r^3} = \frac{16}{13} \Leftrightarrow a \,.\, r^2 = \frac{16}{13} \,.\, (1 - r^3) \quad (II)$$

3) *Dividindo membro a membro (II) por (I), vem:*

$$\frac{a \,.\, r^2}{a \,.\, r} = \frac{\dfrac{16}{13} \,.\, (1 - r^3)}{4 \,.\, (1 - r^2)} \Leftrightarrow r = \frac{4}{13} \,.\, \frac{(1 + r + r^2)}{(1 + r)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9r^2 + 9r - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}, \text{ pois } r > 0$$

4) *Substituindo* $r = \dfrac{1}{3}$ *em (I), temos:*

$$a \,.\, \frac{1}{3} = 4 \,.\, \left(1 - \frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow a = \frac{32}{3}$$

$$\text{Logo, } a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = 11$$

Resposta: *a + r = 11*

29

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Resolução

$9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9y^2 - 144y + 576 - 16x^2 + 224x - 784 - 144 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(y - 8)^2 - 16(x - 7)^2 = 144 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{(y-8)^2}{4^2} - \frac{(x-7)^2}{3^2} = 1,$$

que é uma equação da hipérbole de centro (7; 8), eixos paralelos aos eixos coordenados e semi-eixos transverso e conjugado, respectivamente, iguais a $a = 4$ *e* $b = 3$

Assim, a semidistância focal f é tal que:

$f^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow f = 5$

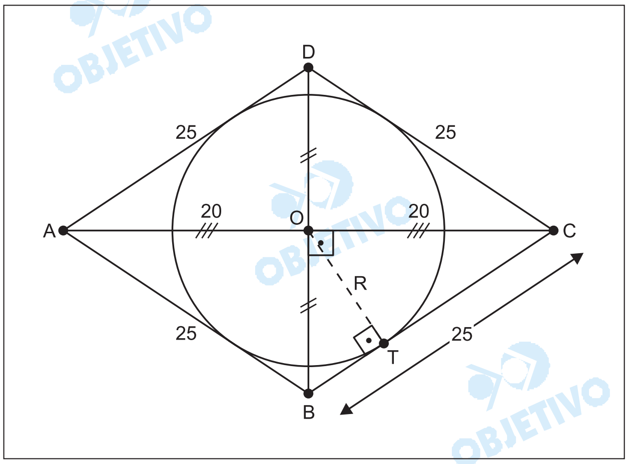
Logo, a distância focal desta hipérbole é $2f = 10$

Resposta: *10*

30

Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

Resolução



1º) *No losango ABCD, tem-se:*

$AB = BC = CD = DA = 25cm$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,

$OA = OC = 20cm$ e $OB = OD$

2º) *No triângulo retângulo OBC, tem-se:*

$(OB)^2 + (OC)^2 = (BC)^2 \Leftrightarrow (OB)^2 = 25^2 - 20^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OB = 15$ cm

3º) *No triângulo retângulo OBC, tem-se ainda*

$OB \,.\, OC = BC \,.\, OT$

Assim, sendo R a medida, em centímetros, do raio do círculo inscrito no losango ABCD, tem-se:

$15 \,.\, 20 = 25 \,.\, R \Leftrightarrow R = 12$

4º) *A área S, em centímetros quadrados, desse círculo é tal que:*

$S = \pi R^2 = \pi \,.\, 12^2 = 144\pi$

Resposta: $S = 144\pi$ cm^2

Comentário de Matemática

Com 19 questões de álgebra, 5 de geometria, 3 de trigonometria e 3 de geometria analítica, a banca examinadora do ITA conseguiu elaborar uma excelente prova de Matemática, na qual podemos destacar o alto grau de dificuldade da maioria das questões e a ausência de alternativa correta para o teste número 18, de geometria analítica, causada certamente por um infeliz erro de digitação.