MATEMÁTICA

1

Assinale a alternativa verdadeira:

a) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

b) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

c) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$

d) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$

e) $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$

Resolução

Para $x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ temos:

1) $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}^*$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+^*$ e $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}_+^*$

2) $\left.\begin{matrix} \sqrt{x+1} > \sqrt{x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 2\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \left(2\sqrt{x}\right)^{-1}$$

Para x = 2016 resulta

$$\boxed{\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}} \text{ (I)}$$

3) $\left.\begin{matrix} \sqrt{x-1} < \sqrt{x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{-1} > \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x-1} > \left(2\sqrt{x}\right)^{-1}$$

Para x = 2016 resulta

$$\boxed{\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}} \text{ (II)}$$

4) Das equações (I) e (II) resulta

$$\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$$

Resposta: C

2

O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras. Pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \le 12 \end{cases}$$

a) $0 \le k < 2$ b) $2 \le k < 4$ c) $4 \le k < 6$

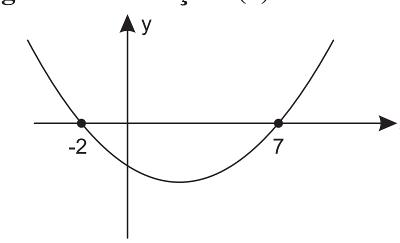
d) $6 \le k < 8$ e) $k \ge 8$

Resolução

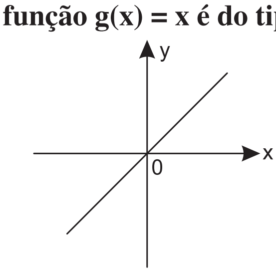
$$\frac{x^2-2x-14}{x} > 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-14}{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-14}{x} > 0$$

Como o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x - 14$ é do tipo



e o gráfico da função $g(x) = x$ é do tipo



temos o seguinte quadro de sinais:

		-2		0		7		x
f	+	○	-		-	○	+	
g	-		-	○	+		+	
$\frac{f}{g}$	-	○	+	∄	-	○	+	

Assim, os valores de x que satisfazem a inequação são tais que $-2 < x < 0$ ou $x > 7$.
Deste, são inteiros e menores ou igual a 12 os seguintes valores –1, 8, 9, 10, 11 e 12, num total de 6.
Assim, k = 6.

Resposta: D

3

Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam a essas condições tem-se que:

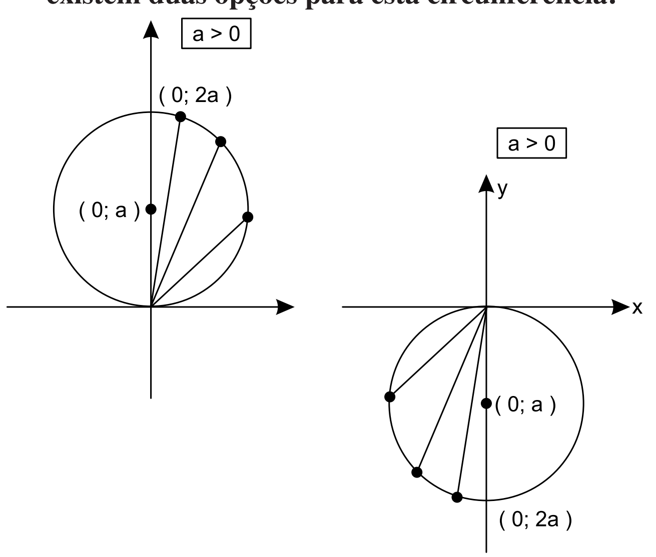
a) $Im(Z_2) > 0$
b) $Im(Z_2) \leq 0$
c) $|Z_1| \leq 2|Z_2|$
d) $Re(Z_1) \geq 0$
e) $Re(Z_1) \leq Im(Z_2)$

Resolução

Sejam $Z_1 = x + yi$ e $Z_2 = ai$, com $x, y, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, pois Z_2 é imaginário puro.

1) $Z_1 - Z_2 = (x + yi) - ai = x + (y - a)\,i$ **e**
$|Z_1 - Z_2| = |Z_2| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = \sqrt{a^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2$ **que é a equação de uma circunferência de raio $|a|$ e centro $(0; a)$, afixo de Z_2.**

2) Conforme o valor de a, positivo ou negativo, existem duas opções para esta circunferência.



3) De todos os números complexos Z_1 cujos afixos pertencem a estas circunferências o de maior módulo é aquele cujo afixo é o simétrico da origem em relação ao centro (ponto de coordenadas $(0; 2a)$) e tem módulo igual a $|2a| = 2|Z_1|$. Assim, $|Z_1| \leq 2|Z_2|$.

Resposta: C

4

No desenvolvimento de

$$\left(x \,.\, \text{sen}2\beta + \frac{1}{x}\cos2\beta\right)^{10}$$

o valor do termo independente de x é igual a $\frac{63}{256}$.

Considerando que β é um número real, com $0 < \beta < \frac{\pi}{8}$ e $x \neq 0$, o valor de β é:

a) $\frac{\pi}{9}$
b) $\frac{\pi}{12}$
c) $\frac{\pi}{16}$
d) $\frac{\pi}{18}$
e) $\frac{\pi}{24}$

Resolução

1) O termo geral do desenvolvimento de
$\left(x \,.\, \text{sen } 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ **é**

$$T_{k+1} = \binom{10}{k}(x \,.\, \text{sen } 2\beta)^{10-k} \,.\, \left(\frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^k =$$

$$= \binom{10}{k}(\text{sen } 2\beta)^{10-k} \,.\, (\cos 2\beta)^k \,.\, x^{10-2k}$$

2) É independente de *x* o termo onde $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = 5$.

3) Para $k = 5$ temos

$$T_{5+1} = \binom{10}{5}(\text{sen } 2\beta)^5 \,.\, (\cos 2\beta)^5 \,.\, x^{10-2\,.\,5} \Leftrightarrow$$

$$T_6 = 252 \,.\, (\text{sen }(2\beta) \,.\, \cos(2\beta))^5$$

Assim

$$252 \,.\, (\text{sen }(2\beta) \,.\, \cos(2\beta))^5 = \frac{63}{256} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen }(2\beta) \,.\, \cos(2\beta) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen }(2\beta) \,.\, \cos(2\beta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen }(4\beta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\beta = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou}$$

$$4\beta = \frac{5\pi}{6} + k \,.\, 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$$

No intervalo $[0; \frac{\pi}{8}]$ **apenas** $\beta = \frac{\pi}{24}$ **serve.**

Resposta: E

5

Calcule o valor de $\frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha}$, sabendo-se que sen a cos $\alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$ b) $\frac{23}{22}$ c) $\frac{25}{23}$ d) $\frac{13}{12}$ e) $\frac{26}{25}$

Resolução

1) $\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha =$

$= (1)^2 - 2\,(\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$

2) $\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha =$

$= (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)(\text{sen}^4\alpha - \text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$

$= (1) \,.\, [(\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha) - (\text{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha)^2] =$

$= \frac{23}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{22}{25}$

Assim $\frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{\frac{23}{25}}{\frac{22}{25}} = \frac{23}{22}$

Resposta: B

6

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Obs: det(*X*) denota o determinante da matriz *X*.

Resolução

1) **Observemos que**
$A^2 - 2A + I = A^2 - A - A + I = A\,(A - I) - (A - I) =$
$= A\,(A - I) - I \,.\, (A - I) = (A - I) \,.\, (A - I) = (A - I)^2$

2) $\det(A^2 - 2A + I) = 16 \Leftrightarrow \det[(A - I)^2] = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\det(A - I)]^2 = 16 \Leftrightarrow \det(A - I) = \pm 4$

3) $A - I = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & a & -2 \\ a-2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

e $\det(A - I) = 2a + 6\,(a - 2) = 8a - 12$

4) **Assim,**
$8a - 12 = -4 \Leftrightarrow a = 1$ **ou** $8a - 12 = 4 \Leftrightarrow a = 2$
e a soma dos possíveis valores de a é 3.

Resposta: D

7

Seja a equação

$$y^{\log_3\sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, y > 0$$

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 3

Resolução

$y^{\log_3\sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6$

Fazendo $y^{\log_3\sqrt{3y}} = x$ **temos**

$y^{\log_3 3y} = y^{\log_3(\sqrt{3y})^2} = y^{2\,.\,\log_3\sqrt{3y}} = \left(y^{\log_3\sqrt{3y}}\right)^2 = x^2$

Substituindo na equação dada resulta $x = x^2 - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ **ou** $x = -2$**, que não serve, pois se** $y > 0$**, então** $x > 0$.

Para $x = 3$ **temos**

$y^{\log_3\sqrt{3y}} = 3 \Leftrightarrow \log_3 y^{\log_3\sqrt{3y}} = \log_3 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{3y} \,.\, \log_3 y = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3(3y) \,.\, \log_3 y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log^2{}_3 y + \log_3 y - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 y = -2$ **ou** $\log_3 y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{9}$ **ou** $y = 3$

O produto das raízes é $3 \,.\, \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$

Resposta: A

8

Seja $f(x) = \sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-2017|}$.

O valor mínimo de f(x) está no intervalo:

a) $(-\infty, 1008]$ b) $(1008, 1009]$

c) $(1009, 1010]$ d) $(1010, 1011]$

e) $(1011, -\infty)$

Resolução

I) Consideremos que existia um termo x – k, com $1 \le k \le 2017$ **e** $k \in \mathbb{N}^*$**, tal que** $|x-k| = 0$.

1) A soma dentro do radical fica assim:

$S = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2017| =$

$= \underbrace{|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-(k-1)|}_{(k-1)\text{ termos}} +$

$+ \underbrace{|x-k| + |x-(k+1)| + \ldots + |x-2017|}_{(2018-k)\text{ termos}} =$

$= \underbrace{|k-1| + |k-2| + \ldots + 1}_{(k-1)\text{ termos}} + \underbrace{0 + 1 + 2 + \ldots + |k-2017|}_{(2018-k)\text{ termos}};$

pois se $|x-k| = 0 \Leftrightarrow x = k$.

2) $S = \dfrac{1}{2} \,.\, (|k-1| + 1)\,(k-1) +$

$+ \dfrac{1}{2} \,.\, (0 + |k-2017|) \,.\, (2018-k)$

Como $1 \le k \le 2017$, $|k-1| = k-1$ **e**

$|k-2017| = 2017-k$

Assim:

$S = \dfrac{1}{2}.(k-1+1)(k-1) + \dfrac{1}{2}(2017-k)(2018-k) \Leftrightarrow$

$S = \dfrac{1}{2}.(k^2 - k + 2017.2018 - 2017k - 2018k + k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = k^2 - 2018k + 2017 \,.\, 1009$

Esta soma tem valor mínimo para

$k = \dfrac{2018}{2 \,.\, 1} = 1009$ **e, portanto, a soma é mínima quando** $|x - 1009| = 0$.

Neste caso, o menor valor da soma é

$S_{min} = 1009^2 - 2018 \,.\, 1009 + 2017 \,.\, 1009 =$

$= 1009 \,.\, (1009 - 2018 + 2017) = 1009 \,.\, 1008$ **e o menor valor da função f é** $f(1009) = \sqrt{1009 \,.\, 1008}$

II) Se não existir termo x – k, com $1 \le k \le 2017$ **e** $k \in \mathbb{N}^*$**, tal que** $|x-k| = 0$**, então** $|x-2017| > 0$ **e:**

$S = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2017| > 0 + 1 + 2 + \ldots + 2016 =$

$= \dfrac{(0 + 2016) \,.\, 2017}{2} = 2017 \,.\, 1008 > 1009 \,.\, 1008$

Neste caso

$f(x) = \sqrt{|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2017|} \ge \sqrt{1009 \,.\, 1008}$

Das partes (I) e (II) temos que o menor valor de f(x) é $\sqrt{1009 \,.\, 1008}$**, pertencente ao intervalo (1008; 1009]**

Resposta: B

9

Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

a) 210 b) 235 c) 250 d) 320 e) 325

Resolução

1) $x + y + z = 7 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 7^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(xy + xz + yz) = 49 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 25 + 2\,(xy + xz + yz) = 49 \Leftrightarrow \boxed{xy + xz + yz = 12}$

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{yz + xz + xy}{xyz} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{12}{xyz} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{xyz = 48}$

3) **Observemos que**

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + z^2) = (7 - z)(25 - z^2 - xy) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 = 175 - 7z^2 - 7xy - 25z + z^3 + xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - z^3 = 175 - 7z^2 - 7xy - 25z + 48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - z^3 = 223 - 7z^2 - 25z - 7xy \quad \text{(I)}$

De modo análogo

$x^3 + z^3 - y^3 = 223 - 7y^2 - 25y - 7xz \quad \text{(II)}$

$y^3 + z^3 - x^3 = 223 - 7x^2 - 25x - 7yz \quad \text{(III)}$

4) **Somando-se membro a membro as igualdades (I), (II) e (III) temos:**

$x^3 + y^3 + z^3 = 669 - 7(x^2 + y^2 + z^2) - 25(x + y + z) -$

$- 7(xy + xz + yz) \Leftrightarrow$

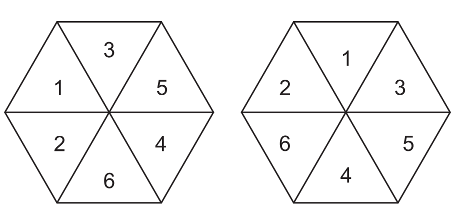
$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 669 - 7 . 25 - 25 . 7 - 7 . 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 235$

Resposta: B

10

Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.

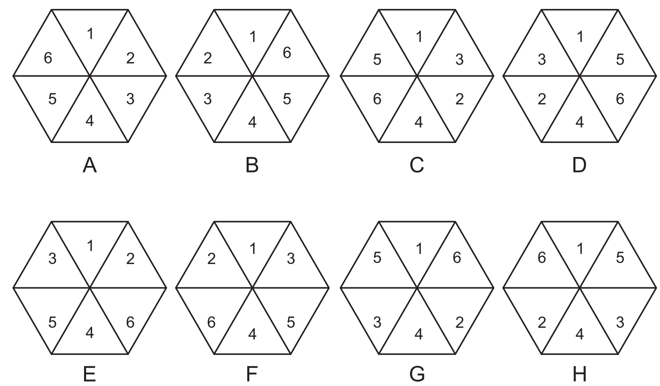


a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 96

Resolução

1) **Fixada a primeira trinca cuja soma é múltipla de 3 os demais termos da sequência ficam determinados. Assim, por exemplo, se fixarmos a trinca (1; 5; 6) os demais termos são 4, 2 e 3, formando a sequência (1, 5, 6, 4, 2, 3).**

2) **Colocando o número "1" no triângulo superior temos as seguintes configurações**



Observe que A e B diferem apenas no sentido (horário ou antihorário). O mesmo ocorre com as duplas (C, D), (E, F) e (G, H).

3) **Agora basta "rodar" estas configurações de modo que o "1" possa ocupar as seis posições possíveis. Ao todo são 8 x 6 = 48 possibilidades.**

Resposta: D

11

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução

1) $\left.\begin{array}{l} a_1 + b_2 = 3 \Rightarrow a_1 + b_1 q = 3 \\ a_4 + b_3 = 26 \Rightarrow (a_1 + 3r) + b_1 . q^2 = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3r + b_1 q^2 - b_1 q = 23 \Rightarrow \boxed{3r + b_1 q (q - 1) = 23}$

2) **Considerando que r e q são inteiros positivos, $q > 2$ e b_1 é inteiro positivo.**
Esta equação admite as seguintes soluções:

r	b_1	q	Observação
1	1	5	Possível
1	10	2	Não serve, pois q > 2
3	7	2	Não serve, pois q > 2
5	4	2	Não serve, pois q > 2
7	1	2	Não serve, pois q > 2

3) Para $r = 1$, $b_1 = 1$ e $q = 5$ temos $a_1 = -2$ e as progressões são:
PA (–2; –1; 0; 1; 2; …) e
PG (1; 5; 25; 125; …)

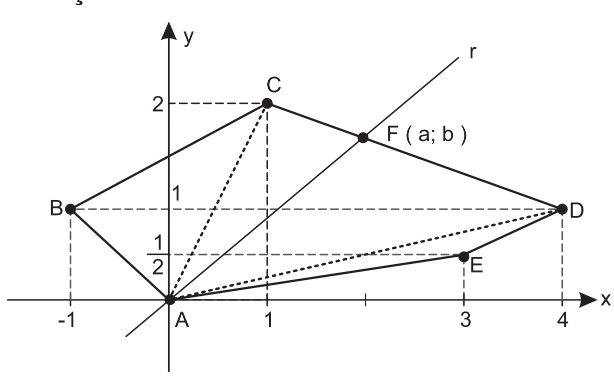
Resposta: A

12

Sejam os pontos A (0, 0), B (–1, 1), C (1, 2), D (4, 1) e E $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. A reta *r* passa por *A* e corta o lado *CD*, dividindo o pentágono ABCDE em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com a reta que liga C e D.

a) $\frac{25}{7}$ b) $\frac{51}{14}$ c) $\frac{26}{7}$ d) $\frac{53}{14}$ e) $\frac{27}{7}$

Resolução



1) O ponto F (a; b) de intersecção da reta r com a reta suporte de $\overline{CD}$ está alinhado com C e D e, portanto,

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + 3b - 7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 7 - 3b} \text{ (I)}$$

2) Seja S_x a área da figura X. Assim,

$$S_{ABCF} = S_{AEDF} \Leftrightarrow S_{ABC} + S_{ACF} = S_{AED} + S_{ADF} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-3| + |b - 2a| = |a - 4b| + |-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|b - 2a| = |a - 4b| - 2} \text{ (II)}$$

3) Das equações (I) e (II) resulta

$$|b - 2(7 - 3b)| = |(7 - 3b) - 4b| - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |7b - 14| = |7 - 7b| - 2$$

4) Para $1 \leq b \leq 2$ (como mostra a figura) temos $7b - 14 \leq 0$ e $7 - 7b \leq 0$. Assim,

$$-(7b - 14) = -(7 - 7b) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7b + 14 = -7 + 7b - 2 \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{23}{14}}$$

5) Desta forma, $a = 7 - 3 \cdot \frac{23}{14} = \frac{29}{14}$ e

$$a + b = \frac{29}{14} + \frac{23}{14} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}$$

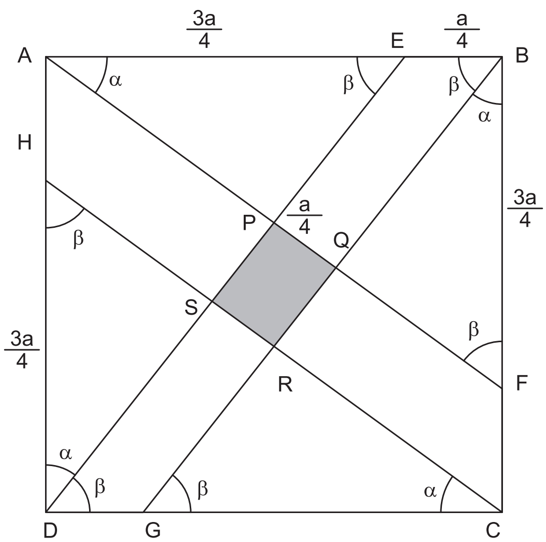
Resposta: C

13

Dado um quadrado *ABCD*, de lado *a*, marcam-se os pontos *E* sobre o lado *AB*, *F* sobre o lado *BC*, *G* sobre o lado *CD* e *H* sobre o lado *AD*, de modo que os segmentos formados *AE*, *BF*, *CG* e *DH* tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos *AF*, *BG*, *CH* e *DE* mede:

a) $\frac{a^2}{25}$ b) $\frac{a^2}{18}$ c) $\frac{a^2}{16}$ d) $\frac{a^2}{9}$ e) $\frac{2a^2}{9}$

Resolução



1) Das congruências dos triângulos ABF, BCG, CDH e DAE tem-se que $\overleftrightarrow{AF} \,//\, \overleftrightarrow{CH}$, $\overleftrightarrow{BG} \,//\, \overleftrightarrow{DE}$ e $A\hat{P}E$ é reto, pois $\alpha + \beta = 90°$. Assim, PQRS é um quadrado.

2) No triângulo ABF tem-se $AF^2 = AB^2 + BF^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow AF^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \Leftrightarrow AF = \frac{5a}{4}$$

3) Da semelhança dos triângulo ABF e APE resulta

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PE}{BF} = \frac{AE}{AF} \Leftrightarrow \frac{AP}{a} = \frac{PE}{\frac{3a}{4}} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{5a}{4}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$AP = \frac{3a}{5} \text{ e } PE = \frac{9a}{20}$$

4) $PQ = AF - AP - QF = AF - AP - PE \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow PQ = \frac{5a}{4} - \frac{3a}{5} - \frac{9a}{20} \Leftrightarrow PQ = \frac{a}{5}$$

5) Desta forma, a área do quadrilátero PQRS é

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{25}$$

Resposta: A

14

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}$ cm² e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) 50 cm³

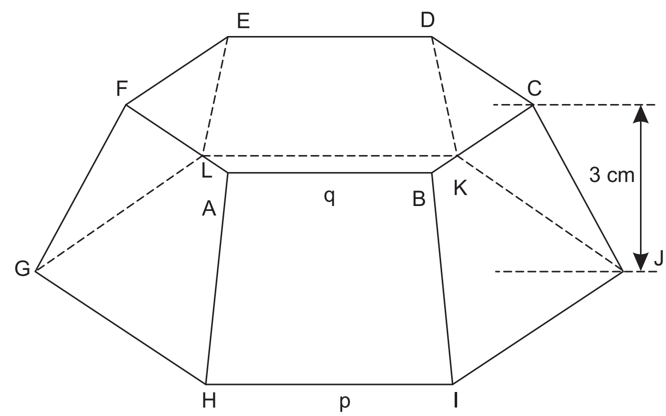
b) $42\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm³

c) $43\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm³

d) $43\sqrt{2}$ cm³

e) $42\sqrt{3}$ cm³

Resolução



1) Sejam p e q as medidas das arestas da base maior e menor, e S_B e S_b suas respectivas áreas. Conforme enunciado, em cm e cm² temos:

$$\begin{cases} 6p + 6q = 36 \\ S_B + S_b = 30\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + q = 36 \\ \dfrac{6p^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{6q^2\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 6 \\ p^2 + q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow p = 4 \text{ e } q = 2, \text{ pois } p > q$$

2) $$S_B = \frac{6 \cdot 4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ e}$$

$$S_b = \frac{6 \cdot 2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

3) Lembrando que o volume do tronco de pirâmide regular é dado por $V = \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b})$, onde H e sua altura, em cm^3, temos

$$V = \frac{3}{3}\left(24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + \sqrt{24\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 42\sqrt{3}$$

Resposta: E

15

O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de *c* menores do que *c* é c^2. Qual é o valor de *b*?

a) 11 b) 13 c) 17 d) 23 e) 29

Resolução

1) Sejam x_1, x_2 e x_3, inteiros, positivos, dois a dois distintos e raízes de $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$.
Admitamos que x_1 e x_2 sejam divisores de 80, e, sem perder generalidade, $x_1 < x_2$.
Desta forma $\{x_1; x_2\} \subset \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\}$

2) Pelas relações de Girard temos:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 80 \Rightarrow x_3 = \frac{80 - x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

Como x_3 é positivo devemos ter $\boxed{x_1 \cdot x_2 < 80}$

3) A tabela mostra as possibilidades para os pares (x_1, x_2) que permitem obter x_3 inteiro e positivo, além de apresentar os possíveis valores de *c* para os casos em que eles são distintos.

x_1	x_2	x_3	$c = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
1	2	26	52
2	4	12	96
2	5	10	100
2	10	5	100
5	10	2	100

4) Dos valores de *c* apresentados na tabela apenas o 52 satisfaz a condição de o produto de seus divisores positivos menores que *c* (1; 2; 4; 13 e 26) é igual a c^2, pois $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 26 = 2704 = 52^2$.

5) Desta forma $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 26$
Ainda pelas relações de Girard,
$b = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 26 = 29$

Resposta: E