01

Julia e Lucas estão em frente ao seu quarto de hotel, que é o quarto número 1 em um longo corredor cujos números dos quartos seguem a ordem dos números inteiros positivos. Julia começou a correr pelo corredor seguida de Lucas, de maneira que a cada 5 quartos pelos quais ela passava, Lucas passava por 3 quartos. Quando Julia chegou ao último quarto do corredor, imediatamente deu meia volta e voltou pelo corredor com a mesma velocidade. Em dado momento Lucas, que também sempre manteve a mesma velocidade, encontrou-se com Julia em frente ao quarto de número 196. O número total de quartos desse corredor, sabendo que é um número terminado em 1 ou 6, é

a) 216.

b) 261.

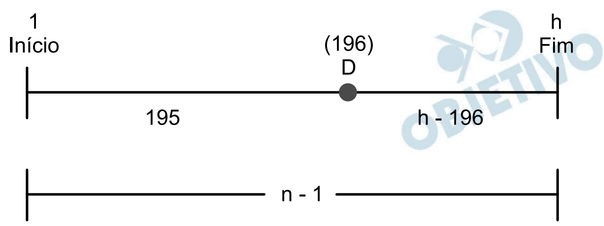
c) 281.

d) 286.

e) 291.

Resolução

Como as velocidades são constantes e a cada 5 quartos percorridos por Julia, Lucas percorria 3 quartos. Podemos afirmar que suas velocidades são 5v e 3v, respectivamente. Para um intervalo de tempo t, podemos representar o corredor da seguinte forma:



Quartos percorridos por Julia: n – 1 + n – 196
Quartos percorridos por Lucas: 195

A partir das velocidades, temos:

$$\begin{cases} 5v = \dfrac{2n - 197}{t} \\ \\ 3v = \dfrac{195}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vt = \dfrac{2n - 197}{5} \\ \\ vt = 65 \end{cases}$$

$$\frac{2n - 197}{5} = 65 \Leftrightarrow n = 261$$

Resposta: B

Considere um número complexo $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z}$. Ao desenharmos, no plano complexo, todos os afixos dos complexos z, tais que $z + \bar{z} = 2\pi^2$, obteremos

a) uma reta vertical paralela ao eixo imaginário.

b) uma reta horizontal paralela ao eixo real.

c) um quadrado, em que um de seus vértices é $(\pi, -\pi)$.

d) uma circunferência de raio π e todos os pontos do seu interior.

e) apenas os pontos de uma circunferência de raio 2π.

Resolução

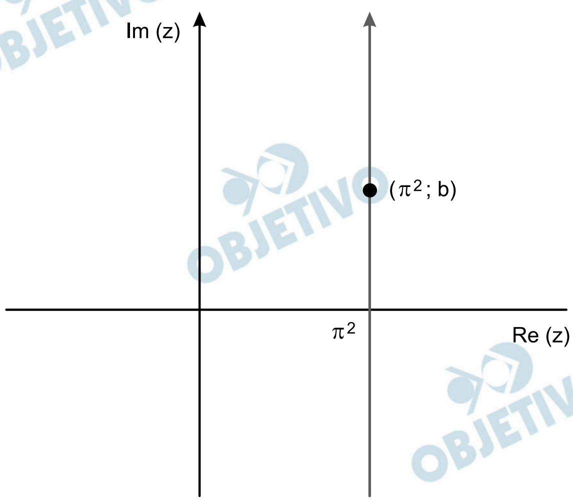
Se Z a + bi, $\bar{Z} = a - bi$. Substituindo na equação, temos:

$$Z + \bar{Z} = 2\pi^2$$

$$a + bi + a - bi = 2\pi^2$$

$$\boxed{a = \pi^2}$$

Assim, $Z = \pi^2 + bi, b \in \mathbb{R}$.

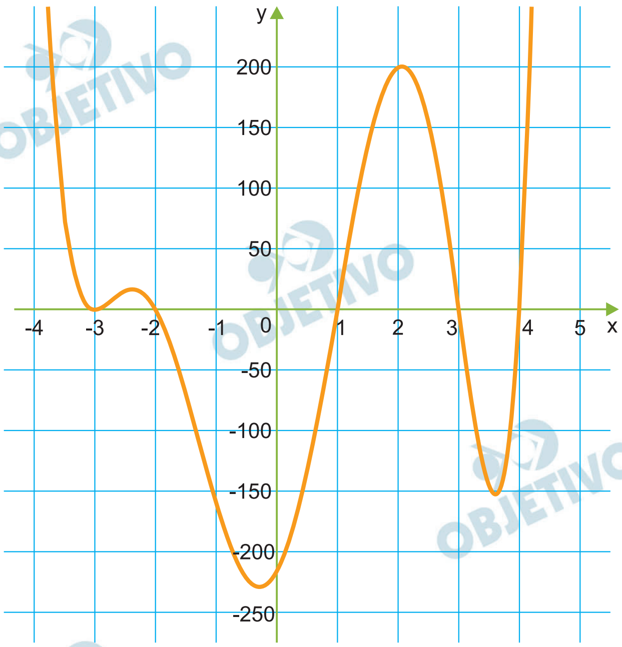


Todos os afixos de Z, quando representados no plano complexo, formam uma reta vertical.

Resposta: A

03

O gráfico de um polinômio de sexto grau, em que a escala entre os eixos é de 1 para 50, está representado a seguir.

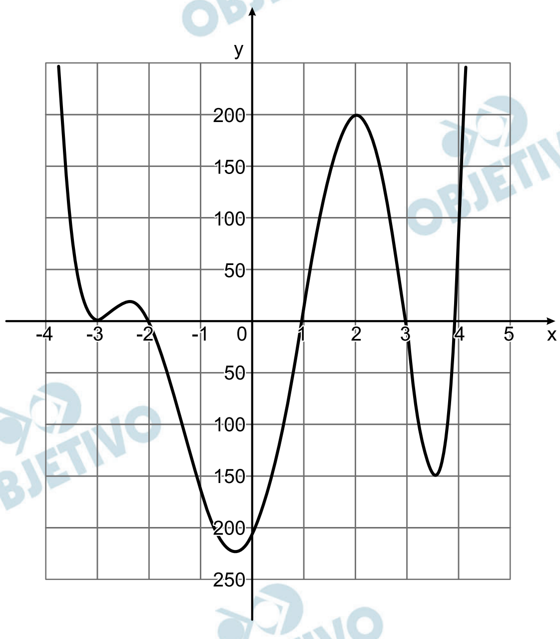


Sabe-se que o coeficiente do termo de sexto grau é 1 e que uma das raízes desse polinômio tem multiplicidade 2. Essa raiz é igual a

a) –3. b) –2. c) 1. d) 3. e) 4.

Resolução

Analisando o gráfico do polinômio, temos que a raiz que tem multiplicidade 2 é igual a –3.



Resposta: A

Considere o polinômio $P(x) = x^3 - 10x^2 + 14x + d$, em que d é uma constante real. Se a soma de duas das raízes desse polinômio é igual a 8, o valor da constante d é

a) – 4.

b) –2.

c) 2.

d) 4.

e) 6.

Resolução

Sejam α; β; γ as raízes de P(x). Utilizando as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{(-10)}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Como 2 é raiz de P(x), temos: P(2) = 0

$$P(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + d$$

$$0 = 8 - 40 + 28 + d$$

$$\boxed{d = 4}$$

Resposta: D

Um garoto brinca com um conjunto de 7 blocos que podem ser inseridos em 3 hastes distintos.

Os blocos e as hastes possuem, dois a dois, cores distintas. Na brincadeira o garoto pode colocar os blocos em uma ou mais hastes e a ordem dos blocos nas hastes e a cor da haste em que cada bloco foi colocado diferencia cada montagem feita. O número de montagens distintas que esse garoto poderá fazer usando os 7 blocos é

a) 30 240.

b) 105 840.

c) 181 440.

d) 211 680.

e) 236 880.

Resolução

Sejam a, b, c, d, e, f, g, os blocos e H_1, H_2, H_3 as hastes.

Seguem algumas formas de organização:

a | b | c d e f g	bloco a em H_1, bloco b em H_2, blocos c, d, e, f, g em H_3
a | b c d e f | g	bloco a em H_1, blocos b, c, d, e, f em H_2, bloco g em H_3
a b c d e | f | g	blocos a, b, c, d, e em H_1, bloco f em H_2, bloco g em H_3

Assim, há um total de 9 elementos que podem ser permutados: 7 blocos e 2 barras.

Utilizando permutação com repetição, temos:

$$P_9^2 = \frac{9!}{2!} = 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 181440$$

Resposta: C

Duas filas, uma de meninos e uma de meninas, são formadas para a entrada em um brinquedo. Entram nesse brinquedo 10 crianças por vez e um sorteio decide de qual fila entrará a criança, com 50% de chances para a fila de meninos e 50% de chances para a fila de meninas. Estando o brinquedo vazio, Ana, Joana e Mariana, que eram as primeiras da fila das meninas, foram as três primeiras sorteadas para entrar. Após o brinquedo atingir sua capacidade máxima, a probabilidade de estar com mais meninos do que meninas é

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{2}{21}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{16}$

Resolução

O brinquedo terá mais meninos que meninas em 2 cenários:

1.º) Entram 7 meninos. A probabilidade desse evento ocorrer é: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

2.º) Entram 6 meninos e 1 menina. Há 7 maneiras de montar o restante da fila com 6 meninos e 1 menina. A probabilidade desse evento ocorrer é:

$$7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{7}{128}$$

Portanto, a probabilidade é: $\frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{1}{16}$

Resposta: E

07

Em um trecho retilíneo de uma rua há 14 vagas, lado a lado, demarcadas para o estacionamento de carros. Os carros entram e saem aleatoriamente dessas vagas e em um dado momento havia 9 carros estacionados. A probabilidade, nesse momento, de não haver vagas vazias lado a lado é de

a) $\dfrac{1}{24}$

b) $\dfrac{5}{24}$

c) $\dfrac{3}{40}$

d) $\dfrac{9}{125}$

e) $\dfrac{18}{143}$

Resolução

Tendo 14 vagas no total, 5 delas livres, há um total de $C_{14;5} = 2002$ maneiras de organizar as vagas. Como não queremos 2 vagas livres lado a lado, as 5 vagas livres podem ocupar 10 posições:

1º) Início do trecho
2º) Entre a 1.ª ocupada e a 2.ª
3º) Entre a 2.ª ocupada e a 3.ª
4º) Entre a 3.ª ocupada e a 4.ª
5º) Entre a 4.ª ocupada e a 5.ª
6º) Entre a 5.ª ocupada e a 6.ª
7º) Entre a 6.ª ocupada e a 7.ª
8º) Entre a 7.ª ocupada e a 8.ª
9º) Entre a 8.ª ocupada e a 9.ª
10º) Fim do trecho

As vagas livres ocuparão 5 dessas 10 posições, num total de $C_{10;5} = 252$ maneiras.
Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{C_{10;5}}{C_{14;5}} = \frac{252}{2002} = \frac{18}{143}$$

Resposta: E

Considere uma matriz quadrada A de ordem n e um polinômio p(x) de grau m. Um polinômio matricial em A é a matriz p(A) de ordem n definida por:

$p(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A_2 + \ldots + a_m \cdot A_m$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n e a_i, com $0 \le i \le m$, o coeficiente do termo de grau i do polinômio. De maneira resumida p(A) é a matriz obtida ao substituir, no polinômio, x pela matriz A e a_0 pela matriz $a_0 \cdot I_n$. Dado o polinômio $p(x) = 3x^2 - x + 2$ e a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, o polinômio matricial em A é

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução

Pelas informações do enunciado, temos:

$$P(A) = 3 \cdot A^2 - 1 \cdot A^1 + 2 \cdot I$$

$$P(A) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

Resposta: D

09

Considere o seguinte sistema linear em que α e β são números reais:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 0 \\ x - y + \beta z = 0 \\ \beta x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

As soluções não triviais desse sistema serão aquelas tais que

a) $\alpha + \beta = 0$.

b) $\alpha - \beta = 0$.

c) $\alpha^2 + \beta^2 = 2$.

d) $\alpha^2 - \beta^2 = 2$.

e) $\alpha - \beta = 2$.

Resolução

Como o sistema admite solução não trivial, temos:

$$\mathbf{D = 0, \text{ onde } D =} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D = -1 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - 1}$$

$$\mathbf{0 = \alpha^2 + \beta^2 - 2}$$

$$\mathbf{\alpha^2 + \beta^2 = 2}$$

Resposta: C

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ matrizes quadradas de ordem 3, tais que para $i = 1$ ou $i = 2$ $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$. Para essas matrizes, $c_{3j} = a_{3j} + b_{3j}$ para quaisquer j.

Sabendo que $\det(A) = 9$ e que $\det(B) = -5$, o valor de

$3 \cdot \det(2C^{-1}) \cdot \det\left(\dfrac{AB}{3}\right)$ é igual a

a) –90.

b) –50.

c) –10.

d) 20.

e) 60.

Resolução

Como para i = 1 ou i = 2 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$, as 3 matrizes possuem os elementos nas duas primeiras linhas.

Na 3.ª linha, temos: $\begin{cases} c_{31} = a_{31} + b_{31} \\ c_{32} = a_{32} + b_{32} \\ c_{33} = a_{33} + b_{33} \end{cases}$

Como Det A = 9 e Det B = –5, Det C = 4, pois

$$\text{Det } C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 9 + (-5) = 4$$

Assim, $\text{Det } C^{-1} = \dfrac{1}{\text{Det } C} = \dfrac{1}{4}$

Aplicando as propriedades do determinante, temos:

$$\text{Det } (2 \,.\, C^{-1}) = 2^3 \,.\, \text{Det } (2 \,.\, C^{-1}) = 8 \,.\, \frac{1}{4} = 2$$

$$\text{Det}\left(\frac{AB}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 .\, \text{Det } (A \,.\, B) =$$

$$= \frac{1}{27} \,.\, \text{Det } A \,.\, \text{Det } B = -\frac{45}{27} = -\frac{5}{3}$$

Portanto, o valor da expressão é:

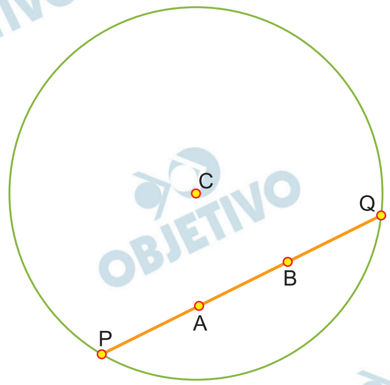
$$3 \,.\, \text{Det}\,(2C^{-1})\left(\frac{AB}{3}\right) \text{ e Det}\left(\frac{1}{3}\,AB\right) = 3 \,.\, 2 \,.\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\,10$$

Resposta: C

11

Em um sistema cartesiano ortogonal, considere uma circunferência de centro C(1, 3) com uma corda PQ e os pontos A(1, –2) e B(5, 0) que dividem essa corda em três segmentos congruentes, conforme mostra a figura.



O raio dessa circunferência é

a) $\sqrt{119}$

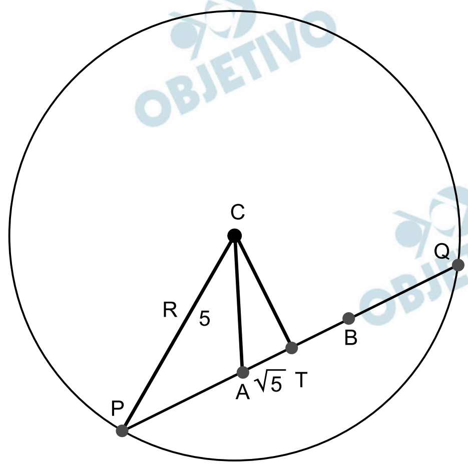
b) $\sqrt{65}$

c) $\sqrt{30}$

d) $\sqrt{40}$

e) $\sqrt{105}$

Resolução



Calculando a medida de $\overline{AB}$, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Do enunciado, temos: $d_{PQ} = 3 \cdot d_{AB} = 6\sqrt{5}$

Seja T ponto médio de $\overline{PQ}$. Assim:

$$d_{PT} = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} \text{ e } d_{AT} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

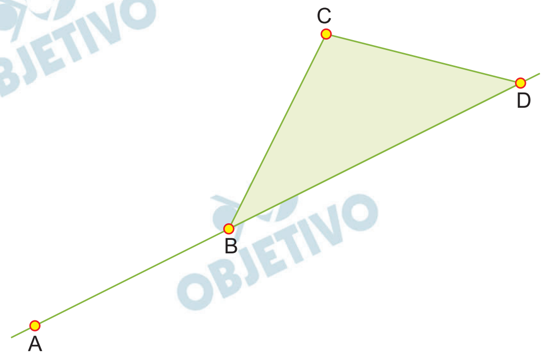
Como $d_{AC} = 3 - (-2) = 5$, no ΔCAT, temos:

$(d_{CT})^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (d_{CT})^2 = 20$

No ΔCPT, temos: $R^2 = 20 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \sqrt{65}}$

Resposta: B

No sistema cartesiano, os pontos A(3, 1), B(7, 3) e $D(x_D, y_D)$ são colineares e o triângulo BCD tem área 9, com C = (9, 7), conforme mostra a figura.



O valor de $x_D + y_D$ é igual a

a) 18.

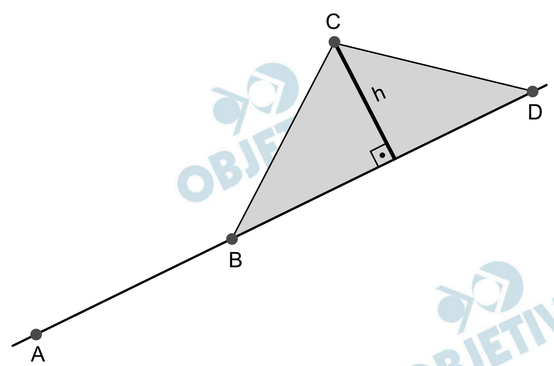
b) 19.

c) 20.

d) 21.

e) 22.

Resolução



A equação da reta r que passa por A (3; 1) e B (7; 3) é:

$$y - 3 = \frac{3-1}{7-3} \cdot (x - 7) \Leftrightarrow \boxed{x - 2y - 1 = 0}$$

D é ponto de r. Assim, temos: $\boxed{x_D = 2y_D + 1}$ **(I)**

Como o ΔBCD possui área 9, temos:

$$9 = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{matrix} 7 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow$$

$$\boxed{18 = |22 - 4x_D + 2y_D|} \quad \textbf{(II)}$$

$$49 + 3x_D = 9y_D - 7x_D - 7y_D - 27$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$18 = |22 - 4\,(2y_D + 1) + 2y_D|$

$18 = |18 - 6\;2y_D| \Leftrightarrow 18 - 7_{yD} = \pm 18 \begin{cases} y_D = 6 \\ t_D = 0 \end{cases}$

Substituindo em (I), temos:

$x_D = 2 \,.\, 6 + 1 = 13$ **ou** $x_D = 2 \,.\, 0 + 1 = 1$

D(13; 6) **ou** $\boxed{\text{D(1; 0) (não convém!)}}$

Portanto, $x_D + y_D = 13 + 16 = 19$

Resposta: B

Uma parábola tem equação $y^2 = (-1)^n \,.\, 14(x - 2)$, em que n é um número inteiro. O esboço do gráfico dessa parábola revela que sua concavidade está para a esquerda, ou seja, todos os pontos que representam esse gráfico estão à esquerda de uma reta $x = v_0$, para algum v_0 real.

Nessas condições, o foco e a diretriz dessa parábola, e o número n são, respectivamente,

a) (0; 2), x = 1,5 e ímpar.

b) (–2; 0), x = 2 e par.

c) (0; 3,5), x = –2 e par.

d) (–1,5; 0), x = – 0,5 e ímpar.

e) (–1,5; 0), x = 5,5 e ímpar.

Resolução

A equação $(y - 0)^2 = (-1)^n \,.\, 14\,(x - 2)$ possui vértice no ponto (2; 0) indiferente do valor de n.
Como sua concavidade está para esquerda, $(-1)^n$ é um valor negativo, o que ocorre quando n é ímpar.

Da equação, temos: $4f = 14 \Rightarrow \boxed{f = 3{,}5}$

A equação da diretriz é dada por: x = 2 + 3,5 = 5,5.

O foco da parábola é o ponto (2 – 3,5; 0) = (–1,5; 5)

Resposta: $\boxed{E}$

Uma função real f é tal que $f(x - 1) = 3f(x) - f(2)$ para todo x real. Dado que $f(3) = 12$, o valor de $f(0) + f(4)$ é igual a

a) 40.

b) 60.

c) 80.

d) 100.

e) 120.

Resolução

Na função $f(x - 1) = 3 \,.\, f(x) - f(2)$, para $x = 3$, temos:

$f(3 - 1) = 3 \,.\, f(3) - f(2)$. Como $f(3) = 12$, temos:

$f(2) + f(2) = 3 \,.\, 12$

$2\,f(2) = 36 \Rightarrow \boxed{f(2) = 18}$

Para $x = 2$, temos:

$f(2 - 1) = 3 \,.\, f(2) - f(2)$

$f(1) = 2 \,.\, f(2)$

$f(1) = 36$

Para $x = 1$, temos:

$f(1 - 1) = 3 \,.\, f(1) - f(2)$

$f(0) = 3 \,.\, 36 - 18$

$\boxed{f(0) = 90}$

Para $x = 4$, temos:

$f(4 - 1) = 3 \,.\, f(4) - f(2)$

$f(3) + f(2) = 3 \,.\, f(4)$

$$f(4) = \frac{12 + 18}{3}$$

$\boxed{f(4) = 10}$

Portanto, $f(0) + f(4) = 90 + 10 = 100$

Resposta: D

Um novo produto será lançado e uma campanha de *telemarketing* será contratada por 30 dias com a meta de vender 100 unidades desse produto no primeiro dia e a cada dia seguinte vender 8 unidades a mais do que no dia anterior. Foi definido pela campanha que o preço unitário em reais desse produto no dia d, com $1 \leq d \leq 30$, será calculado pela função $p(d) = \dfrac{d.n(d)}{3} + 50$, em que n(d) é o número de produtos que se espera vender no dia d, de acordo com a meta. O total arrecadado pela campanha no dia em que o preço desse produto teve o menor valor foi

a) R$ 5.000,00. b) R$ 5.025,00.

c) R$ 5.075,00. d) R$ 5.125,00.

e) R$ 5.150,00.

Resolução

Vendendo 100 unidades no dia 1 e 8 unidades a mais que no dia anterior, as quantidades de vendas formam uma P.A. com $a_1 = 100$ e R = 8. Assim, temos:

$$n(1) = 100$$
$$n(2) = 100 + 8 \,.\, 1$$
$$n(3) = 100 + 8 \,.\, 2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n(d) = 100 + 8 \,.\, (d - 1)$$
$$\boxed{n(d) = 8d + 92}$$

Substituindo na função dada, temos:

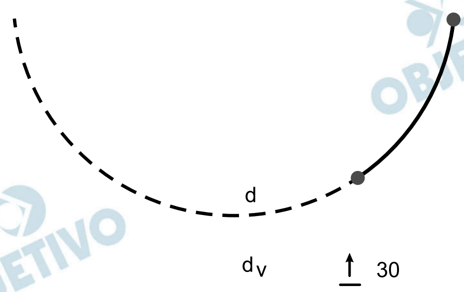
$$p(d) = \frac{d \,.\, (8d + 92)}{400} + 50$$

$$p(d) = \frac{8d^2 + 92d + 20000}{400}$$

Essa função quadrática atinge seu valor mínimo no vértice. Seja d_V sua coordenada horizontal. Assim, temos:

$$d_V = \frac{-B}{2A} \,.\, \frac{-\dfrac{92}{400}}{2 \,.\, \dfrac{8}{400}} = \frac{-23}{4}$$

Como d_V não está definido ao intervalo do exercício ($1 \leq d \leq 30$) e a função é estritamente crescente para valores maiores que d^V, o menor preço, dentro do intervalo do exercício, ocorrerá para d = 1. Assim, temos:



n(1) = 100

$$d(1) = \frac{1 \cdot 100}{400} + 50 = 50{,}25$$

Assim, a arrecadação será: 50,25 . 100 = 5025

Resposta: B

16

A solução da equação logarítmica

$$\frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{24} x} = 3 \text{ é}$$

a) $x = 3$.

b) $x = 6$.

c) $x = 12$.

d) $x = 24$.

e) $x = 72$.

Resolução

Aplicando as propriedades de logaritmo, temos:

$$\frac{1}{\log_9 x} = \frac{1}{\log_{24} x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x 9 + \log_x 24 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x (9 \,.\, 24) = 3$$

$$x^3 = 216$$

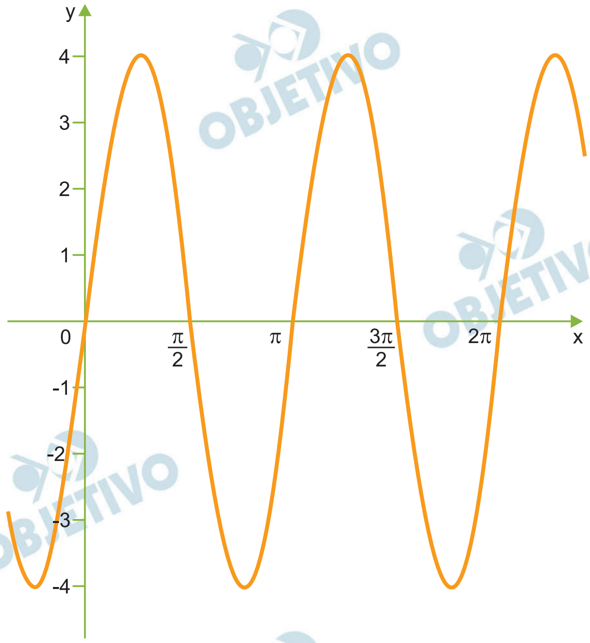
$$x = \sqrt[3]{216}$$

$$\boxed{x = 6}$$

Resposta: B

17

Fones de ouvido com cancelamento de ruído são aqueles que possuem microfones que captam o som ambiente e produzem uma onda sonora que "cancela" esse som, ou seja, o fone faz uma adição dessas ondas sonoras de maneira que a soma seja zero, dando a sensação de não haver sons externos ao fone. Considere que um desses fones detectou uma onda sonora de equação $y = 4\text{sen}(2x)$, cujo gráfico está representado a seguir.



Uma onda que o fone poderá produzir para cancelar o ruído detectado é

a) $y = 4\text{sen}(2x + \pi)$.

b) $y = 0{,}25\text{sen}(2x + \pi)$.

c) $y = 2\text{sen}(x + \pi)$.

d) $y = 0{,}25\text{sen}(0{,}5x + 2\pi)$.

e) $y = 4\text{sen}(2x + 2\pi)$.

Resolução

Para que a adição entre as ondas seja zero, temos:

$g(x) + 4 \,.\, \text{sen}\,(2x) = 0$

$g(x) = -4\,\text{sen}\,(2x)$

onde g(x) é a função da onda que está adicionada.

Como $\text{sen}(\theta + \pi) = \text{sen}\,\theta \,.\, \cos\pi + \text{sen}\,\pi \,.\, \cos\theta = -\text{sen}\,\theta$, temos:

$g(x) = 4 \,.\, [-\text{sen}\,2x]$

$g(x) = 4 \,.\, [\text{sen}\,(2x + \pi)]$

Resposta: A

No intervalo $[0, 2\pi]$, a soma de todas as soluções de

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1 + \cos 2x} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} \text{ é igual a}$$

a) -4π.
b) -2π.
c) 0.
d) 2π.
e) 4π.

Resolução

Resolvendo a equação, temos:

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1 + \cos 2x} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1 + \cos 2x} = \text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$1 + \cos 2x = \frac{3}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \quad \text{e} \quad 0 \le x \le 2\pi$$

Para n = 0, temos: $x = \frac{\pi}{6}$ **ou** $x = -\frac{\pi}{6}$ **(não convém!)**

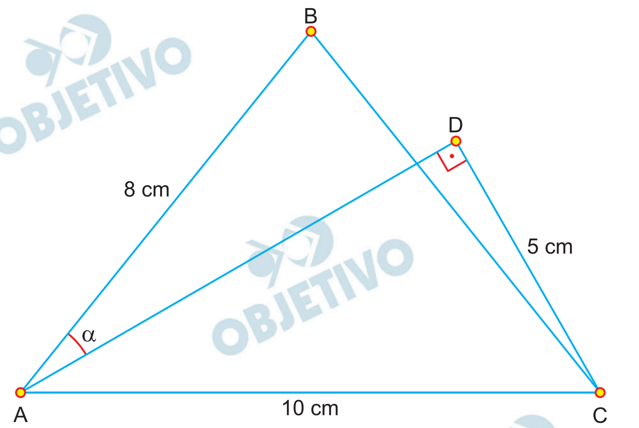
Para n = 1, temos: $x = \frac{7\pi}{6}$ **ou** $x = \frac{5\pi}{6}$

Para n = 2, temos: $x = \frac{13\pi}{6}$ **(não convém!) ou** $x = \frac{11\pi}{6}$

A soma dos valores é: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi$

Resposta: $\boxed{\text{E}}$

Um triângulo isósceles ABC e um triângulo retângulo ADC têm um lado em comum, conforme mostra a figura.



Sendo $\overline{BA} \equiv \overline{BC}$, o valor de sen α é

a) $\dfrac{4\sqrt{11} - 15}{16}$

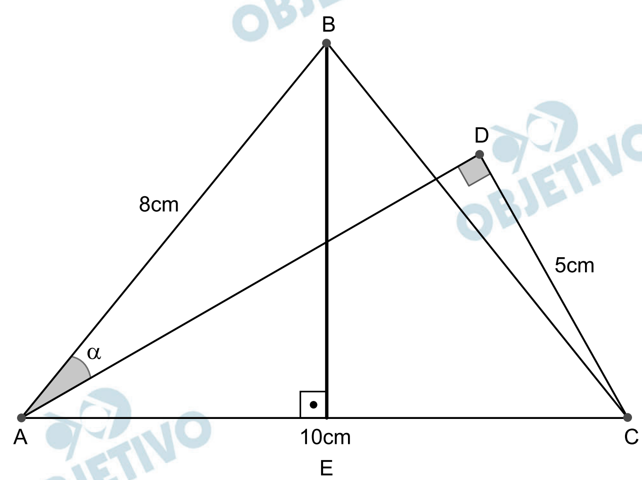
b) $\dfrac{4\sqrt{11} - 9}{8}$

c) $\dfrac{3\sqrt{13} - 5}{16}$

d) $\dfrac{3\sqrt{13} - 10}{16}$

e) $\dfrac{3\sqrt{15} - 9}{8}$

Resolução



No ΔADC, temos:

$$\textbf{sen } D\hat{A}C = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow D\hat{A}C = 30°.$$

Seja BE a altura do triângulo isósceles ABC. Assim, temos: AE = AC = $\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}}$ **= 5 cm**

No ΔAEB, temos:

$$\cos(\alpha + 30°) = \frac{AE}{AB}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos 30° - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} 30° = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{4} + \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos\alpha)^2 = \left(\frac{5}{4} + \operatorname{sen}\alpha\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = \frac{25}{16} + \frac{5}{5}\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha - \frac{5}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{25}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{5}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{23}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow 64\operatorname{sen}^2\alpha + 40\operatorname{sen}\alpha - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 64 \cdot (-23)}}{2 \cdot 64}$$

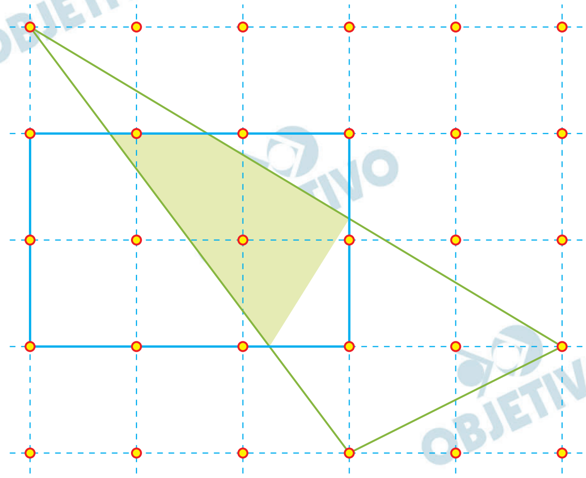
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{-40 \pm 24\sqrt{13}}{128}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-5 + 3\sqrt{13}}{16}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-5 - 3\sqrt{13}}{16} \text{ (Não convém!)}$$

Resposta: C

Em uma malha quadriculada cada quadrículo tem 1 cm de lado. Um triângulo e um retângulo foram desenhados nessa malha com vértices nas intersecções dos quadrículos, conforme mostra a figura.



A área do quadrilátero em destaque, cujos vértices são os pontos de intersecção entre os lados do retângulo e os lados do triângulo, é

a) $\dfrac{61}{30}$ cm^2

b) $\dfrac{67}{30}$ cm^2

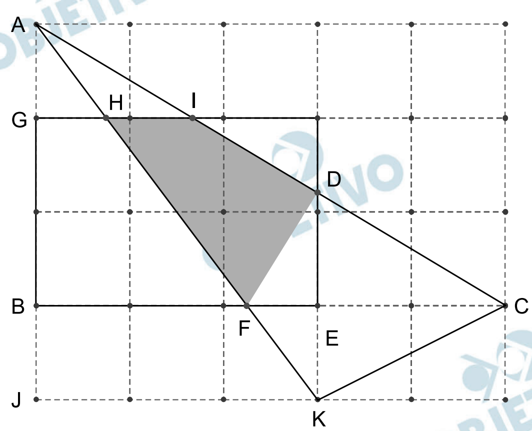
c) $\dfrac{81}{42}$ cm^2

d) $\dfrac{121}{60}$ cm^2

e) $\dfrac{169}{84}$ cm^2

Resolução

Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K pontos da malha quadriculada conforme a figura a seguir.



Os triângulos AGI e ABC são semelhantes.

Assim temos:

$$\frac{GI}{5} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{GI = \frac{5}{3}}$$

Os triângulos AGH e AJK são semelhantes.
Assim temos:

$$\frac{GH}{3} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{GH = \frac{3}{4}}$$

Os triângulos ABF e AJK são semelhantes.

Assim, temos:

$$\frac{BF}{3} = \frac{3}{4} \qquad \boxed{BF = \frac{9}{4}}$$

Os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

Assim, temos:

$$\frac{DE}{3} = \frac{2}{5} \qquad \boxed{DE = \frac{6}{5}}$$

A área da região hachurada pode ser escrita como:

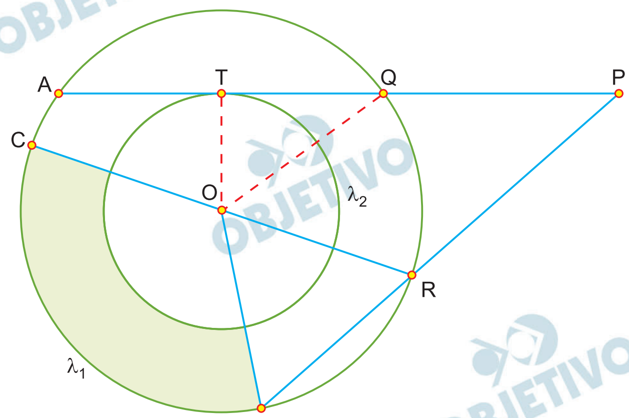
$$S_{DFHI} = S_{\Delta ABC} - S_{\text{⏢}BCHG} - S_{\Delta AGI} - S_{\Delta DFC} =$$

$$S_{DFHI} = \frac{5 \,.\, 3}{2} - \frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) . \, 2}{2} - \frac{\frac{5}{3} \; . \, 1}{2} -$$

$$- \frac{\left(5 - \frac{9}{4}\right) . \frac{6}{5}}{2} = \frac{121}{60}$$

Resposta: D

No plano, as circunferências λ_1, de raio 5 cm, e λ_2 têm o mesmo centro O. A e B são pontos de λ_1 tais que $\overline{PA} \cap \lambda_1 = Q$, $\overline{PB} \cap \lambda_1 = R$ e $\overline{PA}$ é tangente a λ_2 no ponto T, conforme mostra a figura.



As medidas de $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são, respectivamente, 14 cm e 12 cm e $\overline{PR}$ é 1 cm maior que $\overline{PQ}$. Sendo $\overline{CR}$ um diâmetro de λ_1 e usando a aproximação $\pi = 3$, a área destacada na figura vale

a) 16 cm^2.

b) 15 cm^2.

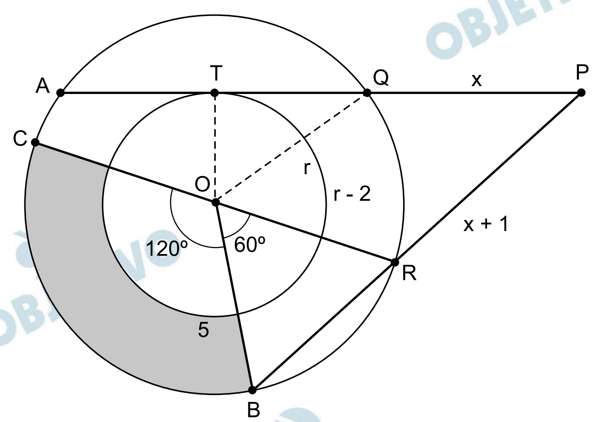
c) 14 cm^2.

d) 12 cm^2.

e) 9 cm^2.

Resolução

Seja PQ = x cm, então PR = x + 1.



Como $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são secantes a λ1, usando as relações de potência de ponto, temos:

PQ . PA = PR . PB

x . 14 = (x + 1) . 12 ⇔ $\boxed{x = 6 \text{ cm}}$

Como PQ = 6 cm, AQ = 14 – 6 = 8 cm.

$$AT = TQ = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$$

Como PR = 6 + 1 = 7 cm, RB = 12 – 7 = 5 cm.

Dessa forma, o triângulo ORB é equilátero, pois

RB = OR = OB = 5 cm.

Assim, $B\hat{O}R = 60°$ e $B\hat{O}C = 180° - 60° = 120°$

Seja r o raio de λ_2. No ΔQOT, temos:

$(TQ)^2 + (r)^2 = (OQ)^2$

$(r)^2 = 5^2 - 4^2$

r = 3 cm

Assim, a área da região hachurada é:

$$\frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot (5^2 - 3^2) = 16\text{ cm}^2$$

Resposta: A

22

A área de um polígono regular pode ser calculada pela fórmula $A = \dfrac{Pa}{2}$, em que P é o perímetro e a é o apótema do polígono. Em um decágono regular, uma de suas diagonais forma ângulos retos com seus lados, conforme mostra a figura.

Sendo 100 cm^2 a área desse decágono, a área do pentágono destacado vale

a) 20 cm^2.

b) 25 cm^2.

c) 30 cm^2.

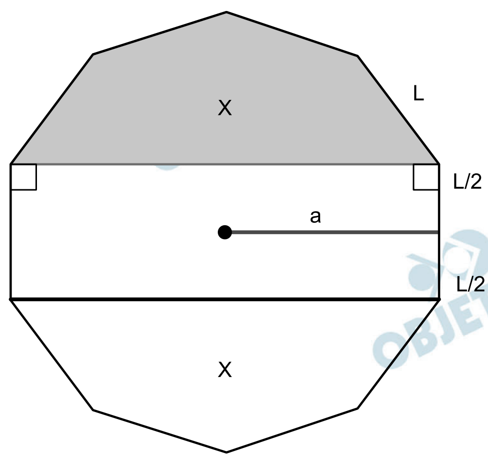
d) 35 cm^2.

e) 40 cm^2.

Resolução

Seja L o lado do decágono regular. A área do decágono é $\dfrac{10L \,.\, a}{2} = 5La$.

Do texto, temos: $5L \,.\, a = 100 \Leftrightarrow \boxed{2 \,.\, a = 20}$



Traçando outra diagonal, paralela à da figura, o decágono fica dividido em 2 pentágonos de mesma área e um retângulo de lados medindo 2a e L. Sendo x a área de cada pentágono, temos:

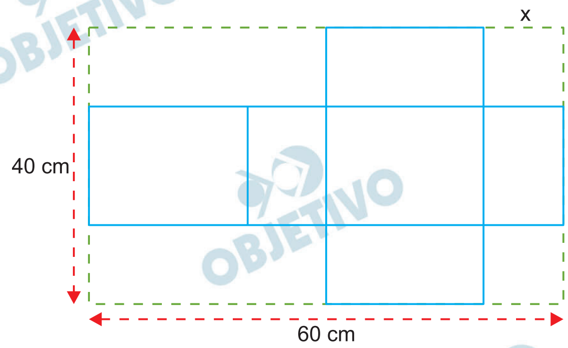
$x + x + 2a \,.\, L = 100 \Leftrightarrow 2x + 2 \,.\, 20 = 100$

$x = 30\ cm^2$

Resposta: C

23

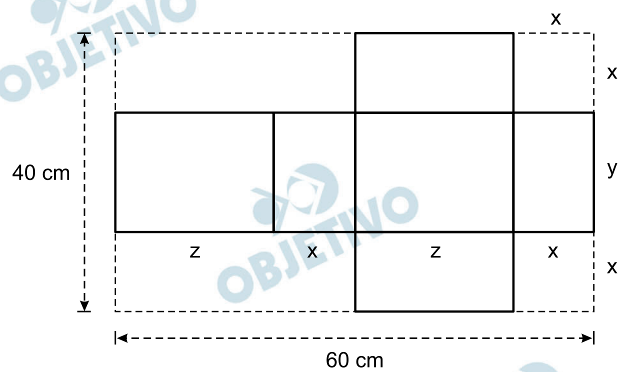
De uma folha retangular de papel de medidas 60 cm por 40 cm serão recortados quatro cantos, de maneira a ser possível construir um paralelepípedo reto-retângulo de área total 1 698 cm^2, conforme mostra a figura.



Nessas condições o valor de x é

a) 6 cm.
b) 7 cm.
c) 8 cm.
d) 9 cm.
e) 10 cm.

Resolução



Sejam y e z as medidas dos lados do retângulo indicadas na figura. Da planificação do paralelepípedo, temos:

$$\begin{cases} x + y + \lambda = 40 \\ x + z + x + z = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 - 2x \\ z = 30 - x \end{cases}$$

Da área total do paralelepípedo, temos:

$$2(xy + xz + yz) = 1698$$

$$x \cdot (40 - 2x) + x(30 - x) + (40 - 2x) \cdot (30 - x) = 849 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 30x - 351 = 0$$

$$x = 9 \quad \text{ou} \quad x = -39$$

Como x > 0, temos: x = 9 cm

Resposta: D

24

O rombicosidodecaedro é um sólido formado por 62 faces, todas polígonos regulares. Cada vértice do rombicosidodecaedro é um vértice em comum de dois quadrados, um triângulo e um pentágono. O número de faces quadradas no rombicosidodecaedro é

a) 24.

b) 28.

c) 30.

d) 32.

e) 36.

Resolução

Em cada vértice do poliedro a soma dos ângulos das faces que o compõem é 348°, pois há:

- **1 ângulo de 60° (triângulo)**
- **2 ângulos de 90° (quadrado)**
- **1 ângulo de 108° (pentágono)**

Seja V o número de vértices do poliedro. Utilizando a relação de soma dos ângulos, temos:

$$360°(V - 2) = 348°V \Leftrightarrow \boxed{V = 60}$$

Como, em cada vértice do poliedro há 2 ângulos de 90° (quadrado), 1 ângulo de 60° (triângulo) e 1 ângulo de 108° (pentágono), em 60 vértices há 120 ângulos de 90°, representando o total de ângulo que as Q faces quadradas possuem. Assim, temos:

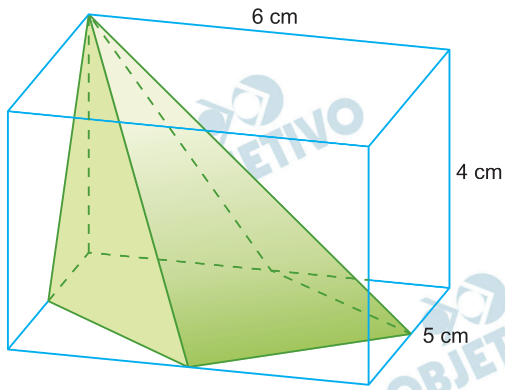
$$4 \,.\, Q = 120 \Leftrightarrow \boxed{Q = 30}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{cases} 3 \,.\, T = 60 \Leftrightarrow T = 20 \\ 5 \,.\, P = 60 \Leftrightarrow P = 12 \end{cases}$$

Resposta: C

Em um paralelepípedo reto-retângulo está inscrita uma pirâmide de base pentagonal. Dois vértices dessa pirâmide são os vértices de uma das arestas do paralelepípedo e os outros quatro vértices são os pontos médios das arestas da base do paralelepípedo, conforme mostra a figura.



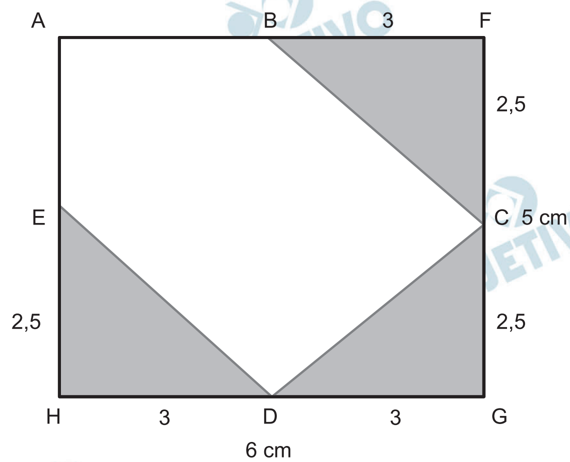
O volume dessa pirâmide é

a) 25 cm^3. b) 30 cm^3. c) 35 cm^3.

d) 40 cm^3. e) 45 cm^3.

Resolução

Sejam ABCDE os vértices da base da pirâmide, sua área S pode ser escrita como:



$$S = S_{\square AFGH} - 3 \cdot S_{\triangle BFC}$$

$$S = 6 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2}$$

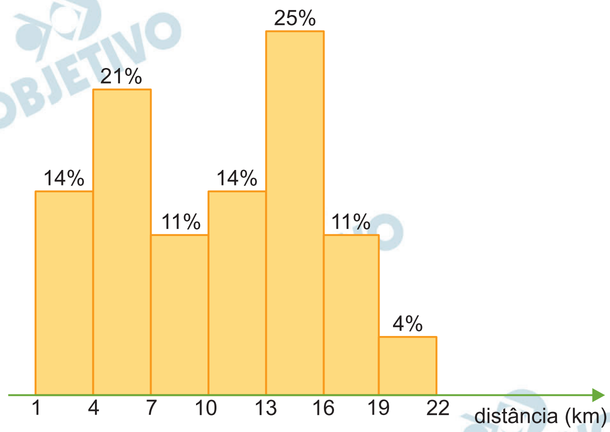
$$S = 18{,}75 \text{ cm}^2$$

O volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 18{,}75 \cdot 4 = 25 \text{ cm}^3$$

Resposta: A

As distâncias, em km, entre a residência e o trabalho de um grupo de trabalhadores foram representadas em um histograma.



Para determinar a mediana desse conjunto de dados foi traçada uma reta vertical que dividiu o histograma em uma região à esquerda e uma região à direita, de maneira que a área dessas regiões fosse a mesma. O valor da mediana dessas distâncias corresponde à abscissa da reta construída, que é aproximadamente

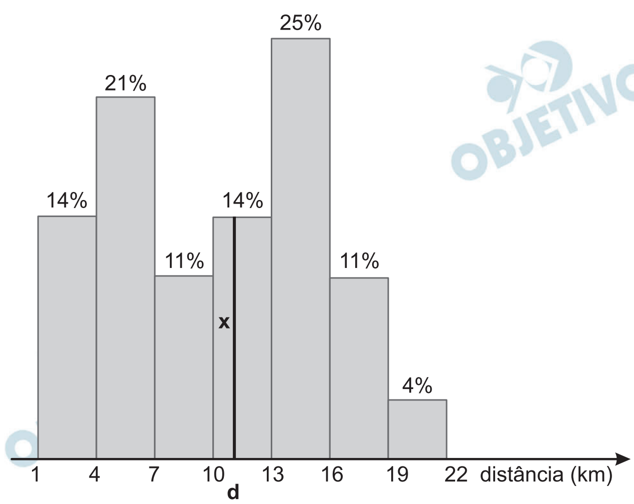
a) 10,9 km. b) 11,5 km. c) 12,9 km.
d) 13,0 km. e) 14,5 km.

Resolução

Para que a mediana divida em 2 grupos de 50%, temos:

$14\% + 21\% + 11\% + x = 50\%$

$x = 4\%$



Seja d a mediana dos valores.

Para que a proporção se mantenha, temos:

$$\frac{d - 10}{13 - 10} = \frac{4\%}{14\%} \Leftrightarrow d = \frac{76}{7}$$

$d \cong 10,9$

Resposta: A

27

Em uma academia 40 praticantes de halterofilismo marcaram em uma planilha o maior peso que conseguiram levantar em um sábado e calcularam a média aritmética desses pesos, obtendo o valor de 55 kg. No domingo, alguns praticantes conseguiram levantar 10 kg a mais do que o maior peso que tinham conseguido no dia anterior e os demais só conseguiram igualar a marca do sábado, de maneira que no domingo a média aritmética dos maiores pesos levantados pelas 40 pessoas foi 57 kg. O número de praticantes que conseguiram superar a marca do sábado foi

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Resolução

Sejam S_1 e S_2 as somas dos pesos levantados no sábado e no domingo, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{cases} S_1 = 55 \,.\, 40 = 2\,200 \\ S_2 = 57 \,.\, 40 = 2\,280 \end{cases} \ominus$$

$$S_2 - S_1 = 2280 - 2200 = 80$$

A diferença entre os dois dias foi que n pessoas conseguiram levantar + 10kg. Assim, temos:

$$10 \,.\, n = 80 \Leftrightarrow \boxed{n = 8}$$

Resposta: $\boxed{E}$

28

Considere os seguintes comandos de uma linguagem de programação natural:

- def atribui um valor a uma variável, por exemplo, def n = 5 atribui o valor 5 à variável n.
- n++ aumenta em uma unidade o valor da variável n, por exemplo, se n = 0 e o comando

  n++ é executado, o valor de n passa a ser 1.
- x = 3x + 1 altera o valor da variável x para o resultado da expressão 3x + 1, por exemplo

  se x = 7 e o comando x = 3x + 1 é executado, o valor de x passa a ser 22, pois 3.7 + 1 = 22.
- x = x/2 altera o valor da variável x para a sua metade, por exemplo se x = 8 e o comando

  x = x/2 é executado, o valor de x passa a ser 4, pois a metade de 8 é 4.

Considere o seguinte programa escrito nessa linguagem natural:

```
def n = 0
def x = 52
repita os comandos entre chaves enquanto o valor da
variável x for diferente de 1
{
n++
se x for ímpar execute x = 3x + 1
se x for par execute x = x/2
}
```

Ao término da execução desse programa o valor da variável n será

a) 8. b) 9. c) 10. d) 11. e) 12.

Resolução

Como 52 é par, o próximo valor será:

$$\mathbf{x = \frac{52}{2} = 26\ (n = 1)}$$

Como 26 é par, o próximo valor será:

$$\mathbf{x = \frac{26}{2} = 13\ (n = 2)}$$

Como 13 é ímpar, o próximo valor será:

x = 3 . 13 + 1 = 40 (n = 3)

Mantendo a execução do programa, podemos montar a seguinte tabela:

x	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Resposta: D

29

Sejam x e y dois algarismos e considere todos os números da forma 34x981y, em que y é a unidade desse número e x é a dezena de milhar. Sabendo que 34x981y é divisível por 12, o total de números dessa forma é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Resolução

Para que 34x981y seja divisível por 12, ele tem que ser divisível por 4 e 3. Assim, temos:

***Divisível por 4*: 1y é divisível por 4, ou seja:**

y = 2 ou y = 6

***Divisível por 3*: 3 + 4 + x + 9 + 8 + 1 + y é divisível por 3, ou seja: 25 + x + y é divisível por 3.**

Para y = 2, temos: 27 + x é divisível por 3, ou seja:

x = 0 ou x = 3 ou x = 6 ou x = 9.

Para y = 6, temos: 31 + x é divisível por 3,

ou seja, x = 2 ou λ = 5 ou x = 8.

Os possíveis números são:

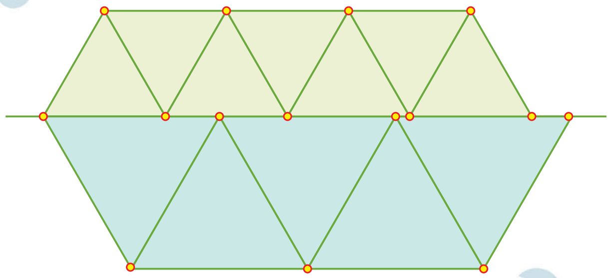
3409812, 3439812, 3469812, 3499812,

3429816, 3459816, 3489816.

Há 7 números possíveis.

Resposta: D

Uma via será enfeitada com triângulos equiláteros de lados 1,88 m e 2,68 m. Os dois primeiros triângulos a serem colocados, um de cada tamanho, terão um vértice em comum e todos os triângulos terão dois lados sobrepostos, sendo que um dos lados estará sobre uma reta, conforme mostra o padrão da figura.



Os triângulos serão colocados até que outros dois triângulos de tamanhos diferentes tenham um vértice em comum, de maneira que não haverá triângulos nem à esquerda do primeiro vértice em comum, nem à direita do segundo vértice em comum. O total de triângulos que serão utilizados para enfeitar essa via será

a) 110. b) 111. c) 112.
d) 113. e) 114.

Resolução

Sejam n e n + k as quantidades de triângulos com 2,68 m e 1,88 m de lado, respectivamente. Assim, temos:

$$2{,}68 \,.\, n = 1{,}88\,(n + k)$$

$$2{,}68n - 1{,}88n = 1{,}88k$$

$$n = \frac{1{,}88k}{0{,}8}$$

$$\boxed{n = \frac{47}{20}\,.\,k}$$

Como n e k são inteiros positivos, temos que k é múltiplo de 20. Para k = 20, temos:

$$n = \frac{47}{20}\,.\,k \Leftrightarrow n = 47$$

Assim são necessários 47 triângulos de 2,68 m e 47 + 20 = 67 triângulos de 1,88 m, totalizando 67 + 47 = 114 triângulos.

Resposta: E