1

Determine o número racional N tal que

$$1 - \frac{1}{3 + \dfrac{1}{2-N}} = \frac{75}{103}.$$

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

$$1 - \frac{1}{3 + \dfrac{1}{2-N}} = \frac{75}{103} \Leftrightarrow \frac{28}{103} = \frac{1}{3 + \dfrac{1}{2-N}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 84 + \frac{28}{2-N} = 103 \Leftrightarrow \frac{28}{2-N} = 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28 = 38 - 19N \Leftrightarrow N = \frac{10}{19}$$

No mercado do produto A, o preço é estabelecido por um agente regulador.

A demanda por este produto, que é a quantidade que os consumidores desejam adquirir, depende do preço estabelecido. Quanto maior o preço, menor a demanda. A oferta deste produto, que é a quantidade que os produtores vão oferecer no mercado, também é uma função do preço. Quanto maior o preço, maior a quantidade ofertada desse produto. Se houver mais produtos ofertados do que a demanda, o agente regulador compra o excesso.

Suponha que as funções de demanda *d* e a oferta o com relação ao preço *p* sejam

- $d(p) = 100 - 2p$
- $o(p) = p - 11$

onde *d* e o estão em unidades do produto *A*, *p* está em unidades monetárias, $d \geq 0$ e $0 \geq 0$.

Responda:

a) Se o agente regulador estabelecer o preço em $p = 40$ unidades monetárias, qual será a quantidade ofertada que não será adquirida pelos consumidores e que, portanto, deverá ser comprada pelo agente regulador?

b) Qual é o maior preço que o agente regulador deve estabelecer para que a quantidade ofertada seja totalmente adquirida pelos consumidores?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resolução

a) $d(40) = 100 - 2 \cdot 40 = 20$
$o(40) = 40 - 11 = 29$
O agente regulador deverá comprar $29 - 20 = 9$ unidades.

b) Para que a oferta seja totalmente consumida, é necessário que $d(p) = o(p)$
Logo:
$100 - 2p = p - 11 \Leftrightarrow p = 37$

Respostas: a) 9
b) $p = 37$

Considere um conjunto finito de números inteiros positivos. Se retirarmos o menor elemento desse conjunto, a média aritmética dos números restantes é 22. Se também retirarmos o maior número desse conjunto, a média aritmética dos restantes passa a ser 21. Se agora recolocarmos o menor, que havia sido retirado, a média aritmética passa a ser 20.

Determine a média aritmética dos elementos do conjunto original.

Resolução

Sendo *p* e *g* o menor e maior número, respectivamente, *s* a soma dos outros números, e *n* a quantidade de números, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{s+g}{n-1} = 22 \\[2mm] \dfrac{s}{n-2} = 21 \\[2mm] \dfrac{p+s}{n-1} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21(n-2) + g = 22(n-1) \\ s = 21(n-2) \\ p + 21(n-2) = 20(n-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g = n + 20 \\ s = 21n - 42 \\ p = -n + 22 \end{cases}$$

Logo a média de todos será:

$$\frac{n + 20 + 21n - 42 - n + 22}{n} = \frac{21n}{n} = 21$$

Armando, Bianca e Cristina investiram seu dinheiro nas criptomoedas X, Y e Z. O rendimento da criptomoeda Z tem sido constante nos últimos meses.

No mês 1, Armando investiu R$ 1 000,00 em X. Na virada para o mês 2, ele transferiu todo o montante obtido para Y.

Bianca também investiu R$ 1 000,00 em X no mês 1, mas quando o mês virou, transferiu o montante para Z.

Já Cristina começou colocando R$ 1 000,00 em Z no mês 1. Na virada do mês transferiu o montante para Y.

Atenção: os itens abaixo são independentes.

a) Suponha que, com relação ao real, a criptomoeda X valorizou 10% no mês 1 e a Y valorizou –10% (valorização negativa) no mês 2. Qual é o saldo de Armando no final do mês 2, em reais?

b) Suponha que, ao final do mês 2, Armando estava com R$1 080,00, Bianca estava com R$ 1 320,00 e Cristina estava com R$ 990,00. Qual foi a valorização da criptomoeda X no mês 1 com relação ao real?

Resolução

a) O saldo de Armando ao final do mês 2 será dado por:

$S = 1000\,(1 + 10\%)\ \ (1 - 10\%) = 990$ reais.

b) Sendo x a valorização da criptomoeda X no primeiro mês, y a valorização da criptomoeda Y no segundo mês e z a valorização da criptomoeda Z nos dois meses, os saldos deles serão dados por:

Armando: $1000.(1 + x)(1 + y) = 1080 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + y) = 1{,}08$ (I)

Bianca: $1000.(1 + x)(1 + z) = 1320 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + z) = 1{,}32$ (II)

Cristina: $1000.(1 + z).(1 + y) = 990$

$\Leftrightarrow (1 + z)(1 + y) = 0{,}99$ (III)

Multiplicando I e II, temos:

$(1 + x)^2 . (1 + y) . (1 + z) = 1{,}08 . 1{,}32$ (IV)

Substituindo III em IV:

$(1 + x)^2 . 0{,}99 = 1{,}4256 \Leftrightarrow (1 + x)^2 = 1{,}44 \Rightarrow$

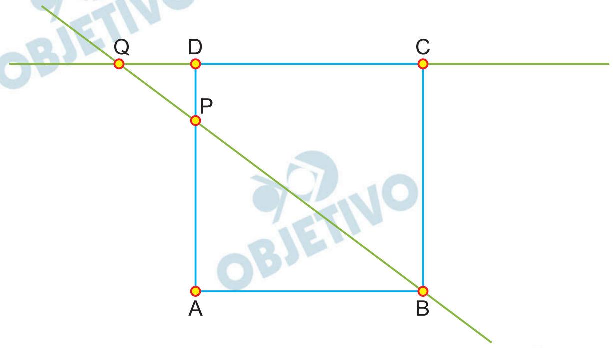
$\Rightarrow 1 + x = 1{,}2 \Rightarrow x = 0{,}2 = 20\%$

Resposta:

a) 990 Reais.

b) Valorização de 20%

Considere o quadrado ABCD da figura abaixo. O ponto Q, sobre a reta DC, é tal que QC = 400 e QB = 500. Determine o comprimento do segmento AP.



Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

No ΔBQC, temos:

$500^2 = 400^2 + CB^2 \Rightarrow CB = 300$, **pois** $CB > 0$

Como ABCD é um quadrado,

$AB = BC = CD = AD = 300$

Sendo $AP = x$, $DP = 300 - x$ **e** $QD = 100$

Como $\Delta QDP \sim \Delta QCB$ **pelo critério AA~, temos:**

$$\frac{300 - x}{300} = \frac{100}{400} \Leftrightarrow x = 225$$

O comprimento do segmento AP é 225.

Resposta: 225

Seja x um número real tal que a mediana dos números 4, 1, 13, 9 e x seja igual à média desses cinco números. Determine todos os valores possíveis para x.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

Ordenando os elementos conhecidos, temos: 1, 4, 9, 13

Se x < 4, a mediana será 4, logo:

$$\frac{1 + 4 + 9 + 13 + x}{5} = 4 \Rightarrow x = -7$$

Se $4 \leq x \leq 9$, a mediana será x, então:

$$\frac{27 + x}{5} = x \Rightarrow x = 6{,}75$$

Se x > 9, a mediana será 9. Assim,

$$\frac{27 + x}{5} = 9 \Rightarrow x = 18$$

Logo, os possíveis valores de x são: –7; 6,75 e 18.

Uma lesminha é colocada em um vértice A de um cubo e ela só pode se movimentar pelas arestas do cubo.

No primeiro movimento, ela escolhe aleatoriamente uma das 3 arestas que convergem em A e movimenta-se para o vértice oposto.

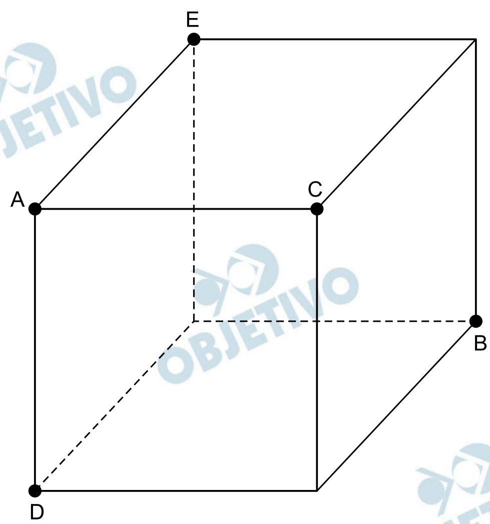
A partir do segundo movimento, ela escolhe aleatoriamente uma das duas arestas que não foram usadas no movimento anterior e movimenta-se para o vértice oposto.

a) Sendo B o vértice do cubo que é diametralmente oposto ao vértice A, qual a probabilidade de a lesminha estar no vértice B após o terceiro movimento?

b) Explique por que a lesminha não pode estar no vértice B após o quarto movimento.

No item a, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução:



a) **Em 3 movimentos, existe um total de 3.2.2 = 12 casos possíveis.**
Após o primeiro movimento, existem sempre dois caminhos que levam a B, logo existem 3.2 = 6 casos favoráveis. Portanto a probabilidade será:

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) **Após 3 movimentos, a lesminha só pode estar no ponto B ou nos pontos indicados por C, D e E na figura. Logo não chega em B com mais um único movimento.**

Considere o triângulo retângulo OAB cujos vértices no plano cartesiano tenham coordenadas O = (0, 0), A = (4, 0) e B = (0,3).

Descreva todos os pontos A' e B' do plano de modo que o triângulo OA'B' tenha, simultaneamente, as seguintes propriedades:

- O triângulo OA' B' é semelhante ao triângulo OAB.
- O cateto OA' é maior do que o cateto OB'
- As coordenadas de A' e B' são números inteiros.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

A' = (a, b) e B'=(c, d), O = (0, 0)

Como OA' ⊥ OB', $m_{OA'} \cdot m_{OB'} = -1$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{-c}{d}$$

Assim:

B'(–b . k; a . k) ou B'(b . k; –a . k)

Como $OB' = \frac{3}{4} \cdot OA'$, $k = \frac{3}{4}$.

Logo:

$$B'\left(-b \cdot \frac{3}{4};\ a \cdot \frac{3}{4}\right) \text{ ou } B'\left(b \cdot \frac{3}{4};\ -a \cdot \frac{3}{4}\right)$$

Para que B' tenha coordenadas inteiras, temos:

a = 4 . i e b = 4 . j

Logo:

A'(4i; 4j) e B'(–3j; 3i)

ou

A'(4i; 4j) e B'(3j; –3i)

Carlos montou uma planilha para enxergar o comportamento da sequência $a_n = 0,9_n$. O início da planilha é o seguinte

	A	S
1	n	a_n
2	1	0,90
3	2	0,81
4	3	0,72
5	4	0,65
6	5	0,59
7	6	0,53
8	7	0,47
9	8	0,43
10	9	0,38
11	10	0,34
12	11	0,31

Carlos optou por exibir as duas primeiras casas decimais dos termos $a_{n,}$ sem arredondamento.

Por exemplo, o número 123,456789 é exibido como 123,45. Apesar de an ser diferente de 0 para todo n, Carlos observou que a planilha com a precisão de duas casas decimais exibe, a partir do K-ésimo termo em diante, TODOS os termos como 0,00.

a) Explique por que a partir de determinado termo a planilha exibe TODOS os termos como 0,00.

b) Determine K.

Tabela de Logaritmos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}(x)$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,778	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000

No item b, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

a) **Como essa é uma função exponencial decrescente, os termos vão se aproximar cada vez mais do resultado 0. Logo, a partir do k-ésimo termo, o resultado será menor que 0,01 e sua representação será 0,00.**

b) **Do item anterior, concluímos que:**

$0{,}9^n < 0{,}01$

$\log 0{,}9^n < \log 0{,}01$

$n \cdot \log 0{,}9 < -2$

$n(\log 9 - \log 10) < -2$

$n \cdot (-0{,}046) < -2 \Leftrightarrow n > 43{,}47$

Portanto K = 44

No plano cartesiano, a partir do ponto (a,b), só há dois movimentos possíveis:

1) ir para o ponto $(a - 1, b + 1)$;
2) ir para o ponto $(a + 1, b + 1)$.

a) Explique por que não se pode ir do ponto (0,0) ao ponto (1,8).
b) Quantos são os caminhos diferentes para ir do ponto (0,0) ao ponto (2,8)?

No item b, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

a) Analisando os movimentos possíveis, concluímos que o ponto sempre vai uma unidade para cima e pode ir uma unidade para esquerda(e) ou direita(d). Como devemos ir de y = 0 para y = 8, o ponto irá realizar 8 movimentos. Portanto:

$$\begin{cases} d + e = 8 \\ d - e = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4{,}5 \\ e = 3{,}5 \end{cases}$$

Resultados incompatíveis pois o número de movimentos é inteiro.

b) De modo análogo ao item anterior, temos:

$$\begin{cases} d + e = 8 \\ d - e = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ e = 3 \end{cases}$$

Os caminhos possíveis podem ser escritos como DDDDDEEE e suas permutações, logo:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\,.\,3!} = 56 \text{ caminhos diferentes}$$