

## M.01

Em uma competição de vôlei, estão inscritos 5 times. Pelo regulamento, todos os times devem se enfrentar apenas uma vez e, ao final da competição, eles serão classificados pelo número de vitórias. Dois ou mais times com o mesmo número de vitórias terão a mesma classificação.

Em cada jogo, os times têm probabilidade  $\frac{1}{2}$  de vencer.

- Explique por que 2 times não podem empatar na classificação com 4 vitórias cada um.
- Qual é a probabilidade de que o primeiro classificado termine a competição com 4 vitórias?
- Qual é a probabilidade de que os 5 times terminem empatados na classificação?

### Resolução

a) Se um dos times obteve 4 vitórias, é porque ganhou dos outros 4. Cada um desses 4, portanto, teve pelo menos uma derrota e no máximo 3 vitórias.

b) A chance de cada time terminar em primeiro lugar

com quatro vitórias é  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ .

Como existem cinco times, a probabilidade de um time qualquer terminar em primeiro lugar e com

quatro vitórias é  $5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ .

c) Sejam os times  $T_1, T_2, T_3, T_4$  e  $T_5$ . As tabelas a seguir, onde “V” significa vitória e “D” significa derrota, mostram todas as possibilidades de se obter duas vitórias e duas derrotas para cada time, e suas respectivas probabilidades.

Tabela 1

	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>	Probabilidade
T <sub>1</sub>	■	V	V	D	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
T <sub>2</sub>	D	■	V	V	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
T <sub>3</sub>	D	D	■	V	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
T <sub>4</sub>	V	D	D	■	V	$\frac{1}{2}$
T <sub>5</sub>	V	V	D	D	■	1

cuja probabilidade é  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ .

Tabela 2

	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>	Probabilidade
T <sub>1</sub>	■	V	V	D	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
T <sub>2</sub>	D	■	V	D	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
T <sub>3</sub>	D	D	■	V	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
T <sub>4</sub>	V	V	D	■	D	$\frac{1}{2}$
T <sub>5</sub>	V	D	D	V	■	1

cuja probabilidade é  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ .

Tabela 3

	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>	Probabilidade
T <sub>1</sub>		V	V	D	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
T <sub>2</sub>	D		D	V	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
T <sub>3</sub>	D	V		V	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
T <sub>4</sub>	V	D	D		V	$\frac{1}{2}$
T <sub>5</sub>	V	D	V	D		1

cuja probabilidade é  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ .

Tabela 4

	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>	Probabilidade
T <sub>1</sub>		V	V	D	D	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
T <sub>2</sub>	D		D	V	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
T <sub>3</sub>	D	V		D	V	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
T <sub>4</sub>	V	D	V		D	$\frac{1}{2}$
T <sub>5</sub>	V	D	D	V		1

cuja probabilidade é  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ .

Como a primeira linha de cada uma dessas tabelas pode permutar de  $P_4^{2,2} = 6$  formas diferentes, é possível obter 6 grupos distintos, de 4 tabelas cada um, cada uma com probabilidade igual a  $\frac{1}{1024}$ .

A probabilidade pedida é:

$$4 \cdot \frac{1}{1024} \cdot 6 = \frac{3}{128}$$

Respostas: a) Demonstração

b)  $\frac{5}{16}$

c)  $\frac{3}{128}$

## M.02

Considere as funções  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  e

$g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  e definidas por  $f(x) = \sin x$  e

$g(x) = \cos x$ . Sendo  $f$  e  $g$  bijetoras, existem funções  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$  tais que  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{id}$  e  $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \text{id}$ , em que  $\text{id}$  é a função identidade.

a) Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ , mostre que  $(g \circ f^{-1})(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$ .

b) Mostre que  $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

### Resolução

Sendo  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$ , temos:

$f^{-1}(x) = \arcsin x$  e  $g^{-1}(x) = \arccos x$  com

$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  e  $g^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

a) Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ , vem:

(I)  $f^{-1}(\alpha) = \arcsin \alpha = k \Leftrightarrow \sin k = \alpha$ , com

$$-\frac{\pi}{2} \leq k \leq \frac{\pi}{2}$$

(II)  $(g \circ f^{-1})(\alpha) = g(f^{-1}(\alpha)) = g(k) = \cos k =$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 k} = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

b) (I)  $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}, \text{ pois } -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

(II)  $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) =$

$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \text{ pois } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Logo,  $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \beta + \theta =$

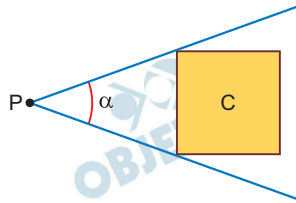
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Respostas: a) Demonstração

b) Demonstração

## M.03

Sejam  $C$  um subconjunto não vazio e  $P$  um ponto, ambos em um mesmo plano, tais que  $P \notin C$ . Diz-se que “ $P$  enxerga  $C$  sob um ângulo  $\alpha$ ” se  $\alpha$  for a medida do menor ângulo com vértice em  $P$  que contenha  $C$ . Por exemplo, na figura, o ponto  $P$  enxerga o quadrado  $C$  sob o ângulo  $\alpha$  indicado.



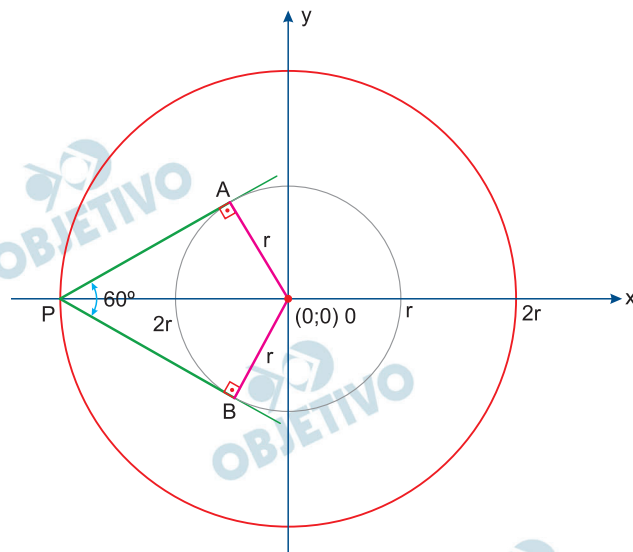
- Se  $C$  for um círculo de raio  $r$ , centrado na origem de um plano cartesiano real, determine o lugar geométrico dos pontos que enxergam  $C$  sob um ângulo de  $60^\circ$ .
- Se  $C$  for a união dos segmentos  $OA$  e  $OB$ , em que  $O = (0, 0)$ ,  $A = (a, 0)$  e  $B = (0, b)$ , com  $a, b > 0$ , determine o lugar geométrico dos pontos que enxergam  $C$  sob um ângulo de  $90^\circ$ .

### Resolução

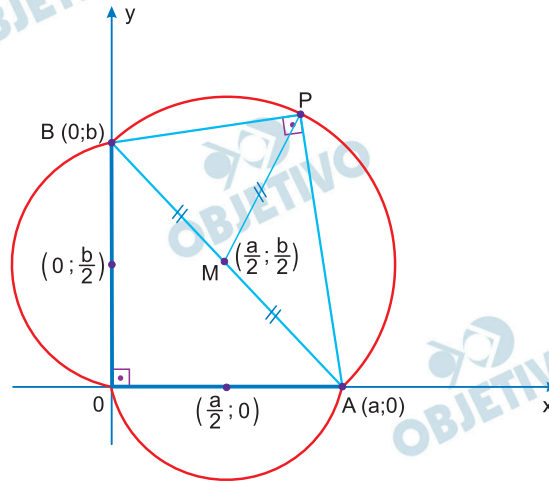
- a) O L.G. dos pontos  $P$  que enxergam a circunferência de raio  $r$  sob um ângulo de  $60^\circ$  é uma circunferência de centro  $O(0,0)$  e raio  $2r$ . De fato: Traçando por  $P$ ,  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  tangentes à circunferência, temos  $\triangle APO \cong \triangle BPO$ , então  $m(\hat{A}PO) = m(\hat{B}PO) = 30^\circ$  e

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{AO}{PO} = \frac{1}{2}, \text{ no triângulo } APO.$$

$$\text{Assim: } \frac{r}{PO} = \frac{1}{2} \Rightarrow PO = 2r$$



- b) O L.G. é a união das semicircunferências de centro  $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$  e raio  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ , centro  $\left(0; \frac{b}{2}\right)$  e raio  $\frac{b}{2}$  e centro  $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$  e raio  $\frac{a}{2}$ , conforme indicado na figura.



## M.04

Considere a sequência

$a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 2$ , e  $a_n = a_{n-4}$ , para  $n \geq 5$ .

Defina  $S_n^k = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$  para  $k \geq 0$ , isto é,  $S_n^k$  é a soma de  $k + 1$  termos consecutivos da sequência começando do  $n$ -ésimo, por exemplo,  $S_2^1 = 4 + 1 = 5$ .

- Encontre  $n$  e  $k$  tal que  $S_n^k = 20$ .
- Para cada inteiro  $j$ ,  $1 \leq j \leq 12$ , encontre  $n$  e  $k$  tal que  $S_n^k = j$ .
- Mostre que, para qualquer inteiro  $j$ ,  $j \geq 1$ , existem inteiros  $n \geq 1$  e  $k \geq 0$  tais que  $S_n^k = j$ .

### Resolução

a)  $20 = 4 + 1 + 2 + 6 + 4 + 1 + 2 = S_2^6 = S_6^6 = S_{10}^6 = \dots$   
com  $k = 6$  e  $n \in \{2; 6; 10; \dots\}$

b) Sendo  $1 \leq j \leq 12$  e  $S_n^k = j$ , temos

$$S_n^k = 1 \text{ se } k = 0 \text{ e } n \in \{3; 7; 11; \dots\}$$

$$S_n^k = 2 \text{ se } k = 0 \text{ e } n \in \{4; 8; 12; \dots\}$$

$$S_n^k = 3 \text{ se } k = 1 \text{ e } n \in \{3; 7; 11; \dots\}$$

$$S_n^k = 4 \text{ se } k = 0 \text{ e } n \in \{2; 6; 10; \dots\}$$

$$S_n^k = 5 \text{ se } k = 1 \text{ e } n \in \{2; 6; 10; \dots\}$$

$$S_n^k = 6 \text{ se } k = 0 \text{ e } n \in \{1; 5; 9; \dots\}$$

$$S_n^k = 7 \text{ se } k = 2 \text{ e } n \in \{2; 6; 10; \dots\}$$

$$S_n^k = 8 \text{ se } k = 1 \text{ e } n \in \{4; 8; 12; \dots\}$$

$$S_n^k = 9 \text{ se } k = 2 \text{ e } n \in \{3; 7; 11; \dots\}$$

$$S_n^k = 10 \text{ se } k = 1 \text{ e } n \in \{1; 5; 9; \dots\}$$

$$S_n^k = 11 \text{ se } k = 2 \text{ e } n \in \{1; 5; 9; \dots\}$$

$$S_n^k = 12 \text{ se } k = 2 \text{ e } n \in \{4; 8; 12; \dots\}$$

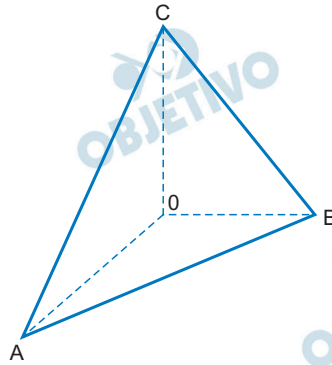
- c) I) Como  $6 + 4 + 1 + 2 = 13$ , se  $S_n^k = j$  for múltiplo de 13, basta tomarmos  $n \in \{1; 5; 9; \dots\}$   
 $k \in \{3; 7; 11; \dots\}$

- II) Se  $j$  não for múltiplo de 13, o número  $j$  é da forma  $13p + r$ , sendo  $p \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq r \leq 12$ .  
Verifica-se pelo item b que sempre existem  $n$  e  $k$  tal que  $S_n^k = r$ , com  $1 \leq r \leq 12$  e, portanto, sempre existem  $n$  e  $k$  tais que  $S_n^k = j$ .

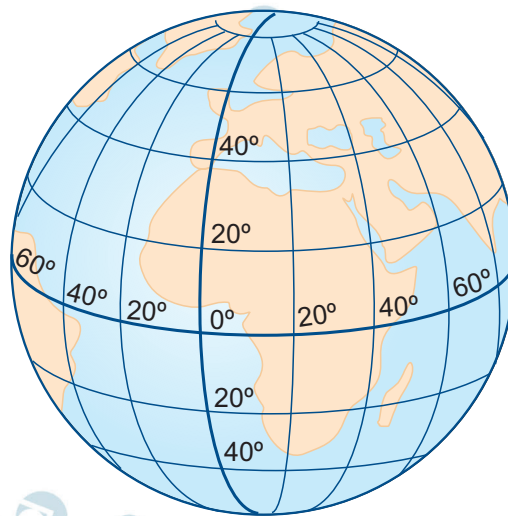
## M.05

Para responder aos itens a) e b), considere a figura correspondente.

- a) Num tetraedro  $OABC$ , os ângulos  $\hat{A}OB$ ,  $\hat{B}OC$  e  $\hat{C}OA$  medem  $90^\circ$ . Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  as medidas dos ângulos  $\hat{A}CO$  e  $\hat{BCO}$ , respectivamente, expresse o cosseno do ângulo  $\hat{A}CB$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ .



- b) Um navio parte do ponto de latitude  $0^\circ$  e longitude  $0^\circ$  e navega até chegar a um ponto de latitude  $45^\circ$  sul e longitude  $45^\circ$  oeste, seguindo a trajetória que minimiza a distância percorrida. Admita que a Terra seja esférica de raio  $R = 6000$  km. Qual foi a distância percorrida pelo navio?



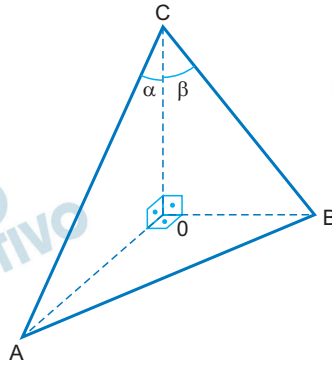
Oeste de Greenwich

Leste de Greenwich



## Resolução

a)



I) No triângulo AOC temos:

$$AC = \frac{CO}{\cos \alpha} \text{ e } AO = AC \cdot \sin \alpha$$

II) No triângulo BOC temos:

$$BC = \frac{CO}{\cos \beta} \text{ e } BO = BC \cdot \sin \beta$$

III) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, temos:

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = (AC \cdot \sin \alpha)^2 + (BC \cdot \sin \beta)^2 =$$

$$= \left( \frac{CO}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \right)^2 + \left( \frac{CO}{\cos \beta} \cdot \sin \beta \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = (CO)^2 \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta)$$

IV) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos (\hat{A}CB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CO)^2 \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta) =$$

$$= \left( \frac{CO}{\cos \alpha} \right)^2 + \left( \frac{CO}{\cos \beta} \right)^2 -$$

$$- 2 \cdot \frac{CO}{\cos \alpha} \cdot \frac{CO}{\cos \beta} \cdot \cos (\hat{A}CB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} -$$

$$- \frac{2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \cos (\hat{A}CB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = \sec^2 \alpha + \sec^2 \beta -$$

$$- \frac{2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \cos (\hat{A}CB) \Rightarrow$$

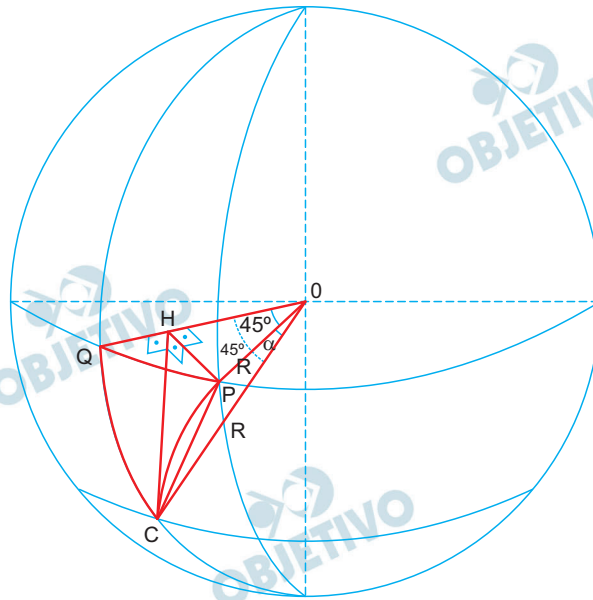
$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 + \operatorname{tg}^2 \beta -$$

$$- \frac{2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \cos (\hat{A}CB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \cos (\hat{A}CB) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos (\hat{A}CB) = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

b)



Para determinar a menor distância percorrida pelo navio, que é o comprimento do arco  $\widehat{PC}$ , temos que determinar a medida do ângulo  $\hat{P}OC = \alpha$ .

Assim,

I) No triângulo retângulo PHO, temos:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{PH}{PO} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{PH}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

II) No triângulo retângulo PHC, temos:

$$CH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

III) No triângulo retângulo PHC, temos:

$$(PC)^2 = (PH)^2 + (CH)^2 \Rightarrow (PC)^2 =$$

$$= \left( \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow PC = R$$

e portanto o triângulo OPC é equilátero pois

$PO = CO = PC = R$  e o ângulo  $\alpha = 60^\circ$

Logo, a medida do arco  $\widehat{PC}$  que corresponde à distância mínima percorrida pelo navio, em km, é

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 6000 = 2000\pi$$

Respostas: a)  $\cos(\widehat{ACB}) = \cos \alpha \cdot \cos \beta$

b)  $2000\pi$  km

## M.06

Considere a função real definida por

$$f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x.$$

a) Qual é o domínio de  $f$ ?

b) Encontre o(s) valor(es) de  $x$  para o(s) qual(is)  $f(x) = 0$ .

**Resolução**

$$a) f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x$$

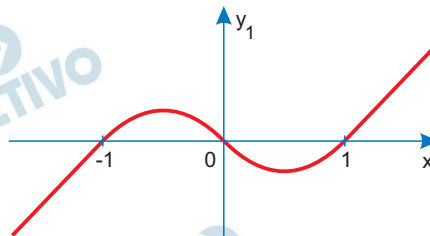
Para  $f(x) \in \mathbb{R}$  devemos ter:

$$1) x - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot x \geq 0 \text{ e } x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \text{ e } x \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \text{ (I),}$$

pois o gráfico da função  $y_1 = x^3 - x$  é do tipo

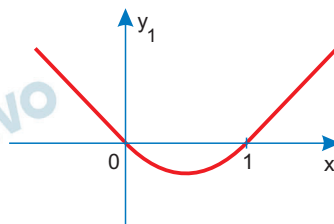


$$2) 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

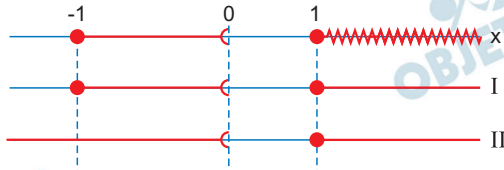
$$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot x \geq 0 \text{ e } x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \text{ e } x \neq 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \text{ (II),}$$

pois o gráfico da função  $y_2 = x^2 - x$  é do tipo



3) De (I) e (II) resulta



Portanto, o domínio de  $f$  é tal que

$$D(f) = [-1; 0[ \cup [1; +\infty[$$

b) 1)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x.$$

Como  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 0$  e  $\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \geq 0$

tem-se  $x \geq 0$ .

2)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x) = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

Sendo  $x \neq 0$ , temos:

$$\frac{x^4}{x^2} - \frac{2x^3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

3) Fazendo  $x - \frac{1}{x} = t$ , resulta  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$  e a

equação se transforma em:

$$(t^2 + 2) - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t = 1$ , raiz dupla da equação.

4) Assim,  $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Sendo } x \geq 0 \text{ somente}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ pode ser raiz.}$$

5) Verificando se  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é raiz.

Na equação original temos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}} + \\ & + \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \\ & = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)} + \\ & + \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \\ & = 1 + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \\ & = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \\ & = \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| - \frac{\sqrt{5}}{2} = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \end{aligned}$$

Como  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in D(f)$ , o conjunto solução da

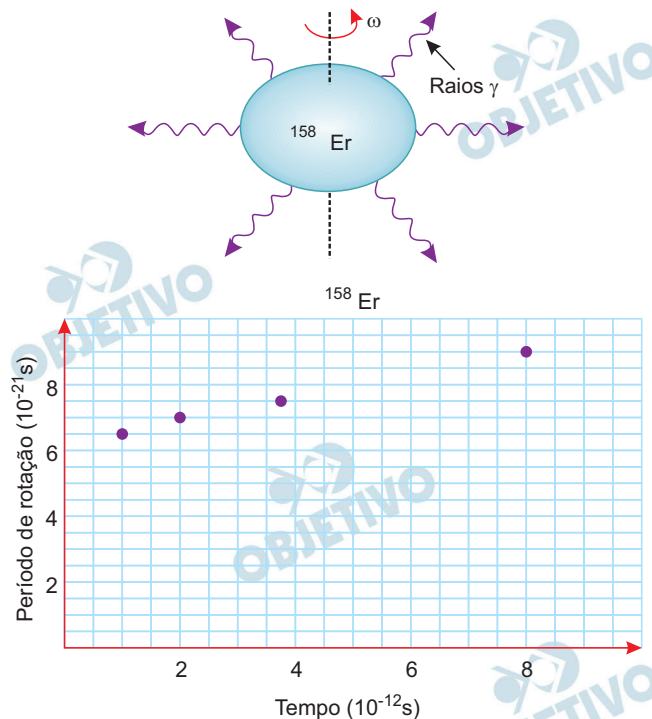
$$\text{equação é } V = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (dupla)} \right\}.$$

Respostas: a)  $D(f) = [-1; 0[ \cup [1; +\infty[$

$$\text{b) } V = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (dupla)} \right\}$$

# F.01

Núcleos atômicos podem girar rapidamente e emitir raios  $\gamma$ . Nesse processo, o núcleo perde energia, passando sucessivamente por estados de energia cada vez mais baixos, até chegar ao estado fundamental, que é o estado de menor energia desse sistema. Nos laboratórios onde esses núcleos são estudados, detectores registram dados dos pulsos da radiação  $\gamma$  emitida, obtendo informações sobre o período de rotação nuclear. A perda de energia devido à emissão de radiação eletromagnética altera o período de rotação nuclear. O gráfico mostra quatro valores do período de rotação de um dos isótopos do núcleo de érbio ( $^{158}\text{Er}$ ) durante um certo intervalo de tempo, obtidos a partir de dados experimentais.



Obtenha o valor da

- velocidade angular de rotação,  $\omega$  do núcleo no instante  $t = 8 \cdot 10^{-12}\text{ s}$ , em rad/s;
- aceleração angular média,  $\alpha$ , do núcleo entre os instantes  $t = 2 \cdot 10^{-12}\text{ s}$  e  $t = 8 \cdot 10^{-12}\text{ s}$ , em  $\text{rad/s}^2$ ;
- aceleração centrípeta,  $a_c$ , de uma porção de matéria nuclear localizada a uma distância  $R = 6 \cdot 10^{-15}\text{ m}$  do eixo de rotação nuclear para o instante  $t = 8 \cdot 10^{-12}\text{ s}$ ;
- energia,  $E$ , emitida pelo  $^{158}\text{Er}$  sob a forma de radiação eletromagnética entre os instantes  $t = 2 \cdot 10^{-12}\text{ s}$  e  $t = 8 \cdot 10^{-12}\text{ s}$ .

Note e adote:

Radiação  $\gamma$ : radiação eletromagnética de frequência muito alta.

Energia rotacional do núcleo  $E_R = (1/2) I \omega^2$ , onde  $I = 12 \cdot 10^{-55}\text{ J s}^2$  é constante.

$\pi = 3$

### Resolução

a) 1) Leitura do gráfico:

$$t = 8 \cdot 10^{-12} \text{s} \Leftrightarrow T = 9 \cdot 10^{-21} \text{s}$$

$$2) \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{9} \cdot 10^{21} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Utilizando  $\pi = 3$ , temos  $\omega \cong 0,67 \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$

$$\omega \cong 6,7 \cdot 10^{20} \text{ rad/s}$$

b) 1) Leitura do gráfico:

$$t_1 = 2 \cdot 10^{-12} \text{s} \Rightarrow T_1 = 7 \cdot 10^{-21} \text{s}$$

$$t_2 = 8 \cdot 10^{-12} \text{s} \Rightarrow T_2 = 9 \cdot 10^{-21} \text{s}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{7} \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{9} \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{1}{6 \cdot 10^{-12}} \cdot 2\pi \cdot 10^{21} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{7} \right) (\text{rad/s}^2)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{33} \frac{(7-9)}{63} (\text{rad/s}^2)$$

Adotando-se  $\pi = 3$ :

$$\alpha = -\frac{2}{63} \cdot 10^{33} \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha \cong -0,032 \cdot 10^{33} \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha \cong -3,2 \cdot 10^{31} \text{ rad/s}^2$$

c) 1) Para  $t = 8 \cdot 10^{-12} \text{s}$ , temos  $\omega = \frac{2\pi}{9} \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$

$$2) a_c = \omega^2 R$$

$$a_c = \left( \frac{2\pi}{9} \cdot 10^{21} \right)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-15} (\text{m/s}^2)$$

$$a_c = \frac{4\pi^2 \cdot 6}{81} \cdot 10^{27} \text{ m/s}^2$$

Assumindo  $\pi = 3$ :

$$a_c = \frac{8}{3} \cdot 10^{27} \text{ m/s}^2$$

$$a_c \cong 2,7 \cdot 10^{27} \text{ m/s}^2$$

d) 1) De acordo com o gráfico:

$$t_1 = 2 \cdot 10^{-12} \text{s} \dots\dots\dots \omega_1 = \frac{2\pi}{7} \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$$

$$t_2 = 8 \cdot 10^{-12} \text{s} \dots\dots\dots \omega_2 = \frac{2\pi}{9} \cdot 10^{21} \text{ rad/s}$$



2) A energia cinética de rotação do núcleo é dado

por:

$$E_R = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$\Delta E_R = E_1 - E_2 = \frac{I}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

$$\Delta E_c = \frac{12 \cdot 10^{-55}}{2} (2\pi \cdot 10^{21})^2 \left( \frac{1}{49} - \frac{1}{81} \right) \text{ (J)}$$

$$\Delta E_c = 24\pi^2 \cdot 10^{-13} \frac{32}{3969} \text{ (J)}$$

Adotando-se  $\pi^2 = 9$ , vem:

$$\Delta E_c \cong 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

A energia do raio  $\gamma$  emitido é igual à variação da energia cinética do núcleo:

$$E = \Delta E_c \cong 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Respostas: a)  $\omega \cong 6,7 \cdot 10^{20} \text{ rad/s}$

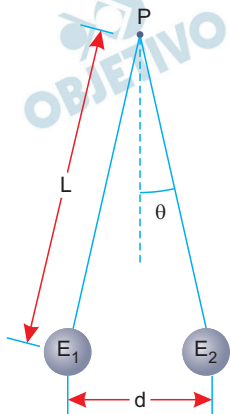
b)  $\alpha \cong -3,2 \cdot 10^{31} \text{ rad/s}^2$

c)  $a_c \cong 2,7 \cdot 10^{27} \text{ m/s}^2$

d)  $E \cong 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

## F.02

Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa 9g, inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento  $L$ , preso em um ponto fixo  $P$ . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.



- a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada ( $E_1$ ) em contato com outra esfera ( $E_2$ ), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento  $L$ , fixo no ponto  $P$ . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo  $d = 8 \text{ cm}$ .

Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine

- b) o módulo da tensão  $\vec{T}$  em um dos fios isolantes;  
c) o módulo da carga  $q_2$  da esfera  $E_2$ ;  
d) a diferença  $N$  entre o número de elétrons e de prótons na esfera  $E_2$  após a eletrização.

Note e adote:

Para a situação descrita, utilize:  $\cos \theta = 1$  e  $\sin \theta = 0,1$ .

Aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ .

Força elétrica entre duas cargas puntiformes  $Q_1$  e  $Q_2$ , distantes  $r$  uma da outra:  $K Q_1 Q_2 / r^2$

$K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

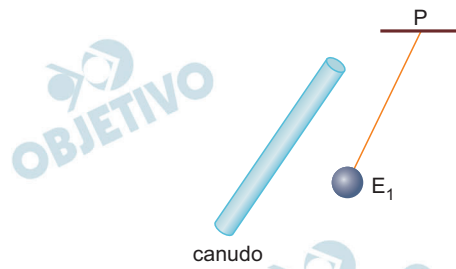
Carga do elétron:  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Ignore a massa dos fios.

### Resolução

- a) Inicialmente os alunos eletrizaram o canudo por atrito, esfregando nele o pedaço de papel por diversas vezes.

- 1) Uma vez eletrizado, o canudo foi aproximado da esfera, sem contudo tocar nela. Ocorreu indução eletrostática e a esfera foi atraída pelo canudo (fig. 1).



(fig. 1)

- 2) Para que a esfera  $E_1$  adquirisse uma carga oposta à do canudo, provavelmente um dos alunos deve ter tocado nela com um dedo, fazendo o papel de fio-terra.

- 3) Depois disso, o canudo é afastado da esfera  $E_1$  e sua carga permaneceu a mesma e tal que:  $|q_1| \neq 0$ .

- b) Para eletrizar  $E_2$ , foi feito um contato entre  $E_1$  e  $E_2$  (fig. 2) e, a seguir, ocorreu uma repulsão entre elas, pois suas cargas elétricas têm o mesmo sinal (fig. 3). As esferas são idênticas e as cargas são iguais:

$$q_1 = q_2$$

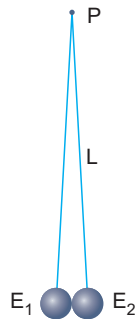


fig. 2

Contato entre as esferas

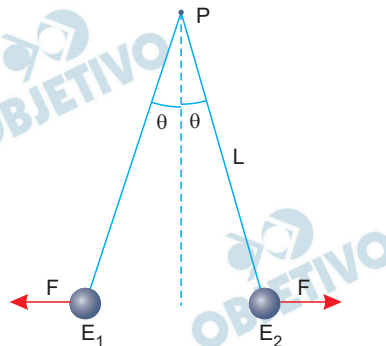


fig. 3

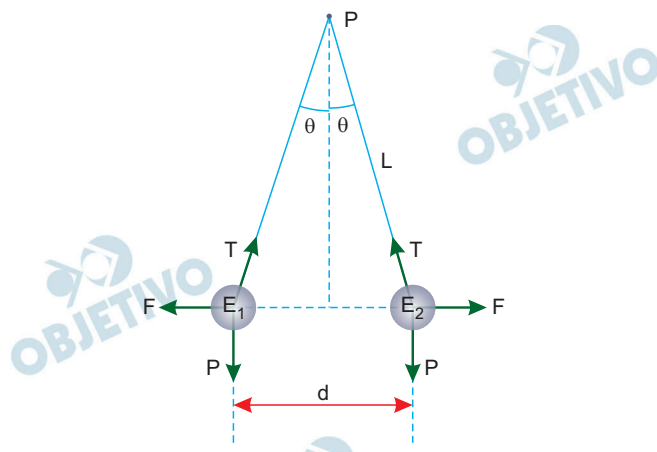
O ângulo  $\theta$  está fora de escala

Na configuração da figura 3, com as esferas em equilíbrio, as forças atuantes em cada esfera são:

$\vec{F}$ : força elétrica de repulsão

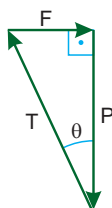
$\vec{P}$ : peso

$\vec{T}$ : força de tração



(fig. 4)

Podemos construir um triângulo com as três forças, pois as esferas estão em equilíbrio.



(fig. 5)

Do triângulo da fig. 5, podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F}{P} \Rightarrow F = P \cdot \operatorname{tg} \theta \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$F = (9 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 \cdot \frac{0,1}{1} \text{ (N)}$$

$$F = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Ainda, da fig. 5, se deduz que:

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$T = \frac{(9 \cdot 10^{-3}) \cdot 10}{1} \text{ (N)}$$

$$T = 9 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

- c) Para o cálculo do módulo da carga, basta usarmos a Lei de Coulomb:

$$F = K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{d^2}$$

Fazendo-se:  $q_1 = q_2 = q$

$$F = K \cdot \frac{q^2}{d^2}$$

$$q^2 = \frac{d^2 \cdot F}{K}$$

Temos:  $d = 8 \text{ cm} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Usando:  $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

$$q^2 = \frac{(8 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} (\text{C}^2)$$

$$q^2 = 64 \cdot 10^{-16} (\text{C}^2)$$

$$|q_2| = |q| = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

- d) Sendo  $N$  a diferença entre o número de prótons e o de elétrons na esfera  $E_2$ , então pode-se escrever:

$$|q_2| = N \cdot e$$

$$N = \frac{|q_2|}{e}$$

$$N = \frac{8 \cdot 10^{-8}}{1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$N = 5 \cdot 10^{11}$$

Respostas: a) ver texto

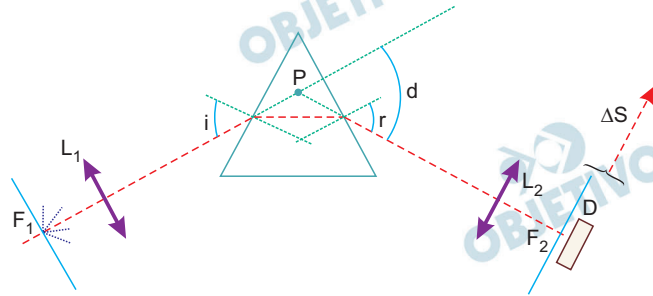
b)  $T = 9 \cdot 10^{-2} \text{ N}$

c)  $|q_2| = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

d)  $N = 5 \cdot 10^{11}$

## F.03

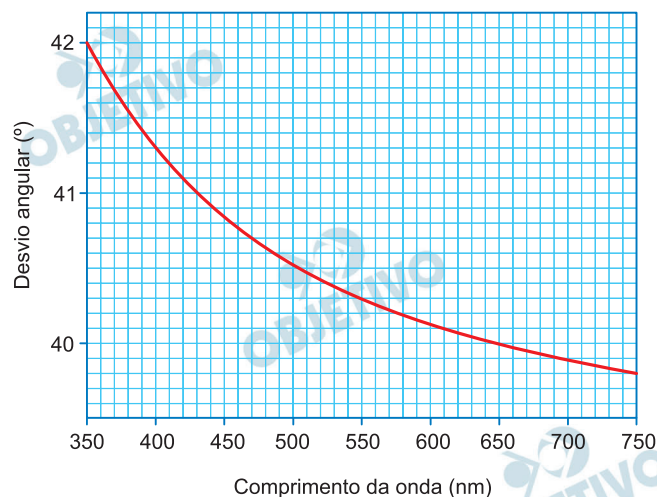
Um espectrômetro óptico, representado na figura, utiliza um prisma como elemento de dispersão da luz de diferentes comprimentos de onda. O espectrômetro possui uma fenda de entrada de luz,  $F_1$ , uma lente convergente,  $L_1$ , um prisma de vidro com ângulos internos de  $60^\circ$  e uma segunda lente convergente,  $L_2$ , que permite a focalização do comprimento de onda da luz refratada pelo prisma em uma fenda,  $F_2$ , imediatamente à frente do detector  $D$ . Cada comprimento de onda é focalizado em posições laterais diferentes no plano focal de  $L_2$ .



- Determine a distância focal,  $f$ , da lente  $L_1$ , posicionada a 30 mm da fenda  $F_1$ , para que um feixe de luz branca, difratado pela fenda  $F_1$ , incida no prisma com os seus raios paralelos entre si.
- O espectrômetro foi construído impondo-se que um raio de luz violeta ( $\lambda_{\text{violeta}} = 400 \text{ nm}$ ) se propague no interior do prisma ( $n = 1,53$  para a luz violeta), paralelamente à sua face inferior. Nesta condição, determine o valor do ângulo de incidência,  $i$ , da luz branca, em relação à normal à superfície do prisma.

Para este espectrômetro, o gráfico na página de respostas apresenta o desvio angular,  $d$ , entre o feixe incidente e o feixe emergente do prisma, em função do comprimento de onda da luz refratada.

- Determine a diferença no desvio angular,  $\Delta d$ , entre os feixes de luz violeta ( $\lambda_{\text{violeta}} = 400 \text{ nm}$ ) e vermelha ( $\lambda_{\text{vermelho}} = 700 \text{ nm}$ ) refratados pelo prisma.



- d) Considere que a distância da lente  $L_2$  ao ponto P seja 20 cm. Determine o deslocamento lateral,  $\Delta S$ , em relação à posição de medida para o raio violeta, do conjunto  $F_2$  e D, para que o feixe de luz vermelha seja detectado.

Note e adote:

$\text{sen } 30^\circ = 0,50$ ;  $\text{sen } 40^\circ = 0,65$ ;  $\text{sen } 50^\circ = 0,77$ ;

$\text{sen } 60^\circ = 0,87$ .

Para ângulos pequenos ( $\theta < 15^\circ$ ), utilizar a aproximação trigonométrica  $\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta/60$ , para  $\theta$  em graus.

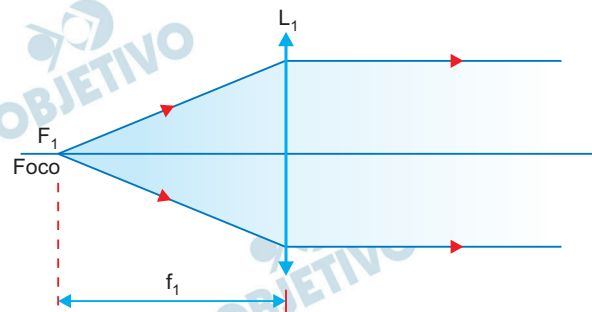
$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ .

Índice de refração do ar:  $n_{\text{ar}} = 1$ .

A abertura de ambas as fendas é cerca de 10 vezes os comprimentos de ondas envolvidos.

### Resolução

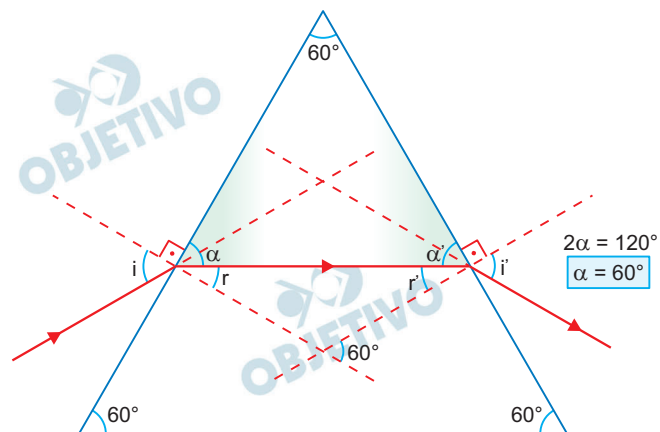
- a) Os raios luminosos refratados pela lente  $L_1$  devem ser paralelos ao seu eixo óptico, como representa a figura abaixo.



Isso significa que a fenda  $F_1$  coincide com o foco principal objeto de  $L_1$ . Logo, a distância focal de  $F_1$  é igual à distância entre  $F_1$  e  $L_1$ .

$$f_1 = 30\text{mm}$$

- b) No esquema abaixo, ilustramos o trajeto de um raio de luz violeta ao atravessar o prisma.



Se o raio luminoso que se propaga no interior do prisma é paralelo à base desse sistema óptico, então o triângulo hachurado é semelhante à seção transversal do prisma, e, portanto, temos:

$$\alpha + r = 90^\circ$$

$$60^\circ + r = 90^\circ$$

$$r = 30^\circ$$

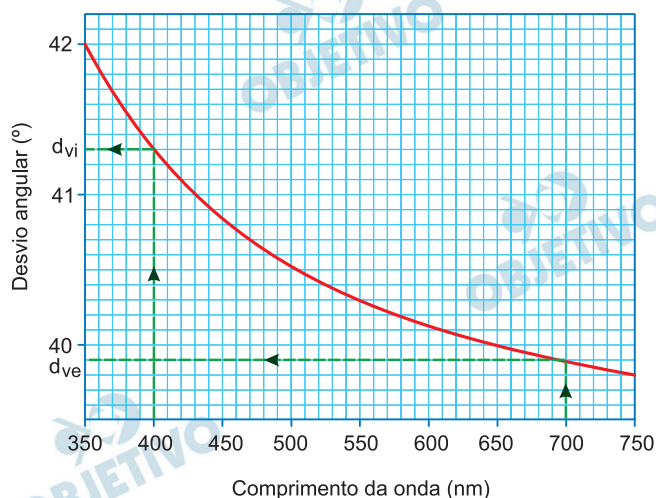
Aplicando-se a Lei de Snell, tem-se:

$$n_{Ar} \text{ sen } i = n_{Vi} \text{ sen } \alpha$$

$$1,0 \text{ sen } i = 1,53 \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow \text{sen } i = 1,53 \cdot 0,5$$

$$\text{sen } i \cong 0,77 \Rightarrow i = 50^\circ$$

c) Do gráfico abaixo, dado na questão:



• Para  $\lambda_{\text{violeta}} = 400 \text{ nm}$ , obtém-se  $d_{\text{violeta}} \cong 41,3^\circ$

• Para  $\lambda_{\text{vermelho}} = 700 \text{ nm}$ , obtém-se

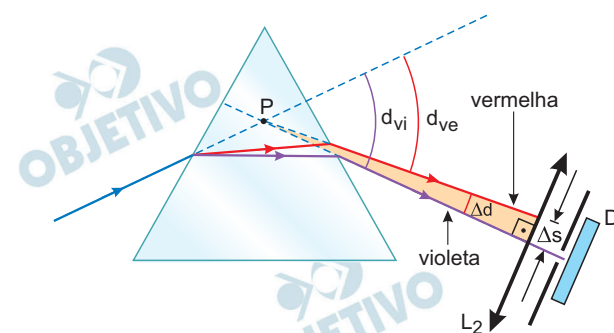
$$d_{\text{vermelho}} \cong 39,9^\circ$$

Logo:  $\Delta d = d_{\text{violeta}} - d_{\text{vermelho}}$

$$\Delta d = 41,3^\circ - 39,9^\circ$$

$$\Delta d = 1,4^\circ$$

d) O esquema abaixo representa o caminho óptico das cores violeta e vermelha até serem focalizadas em  $F_2$ .



No triângulo retângulo hachurado no esquema, tem-se:

$$\text{tg } \Delta d \cong \frac{\Delta s}{L_2 P} \Rightarrow \text{tg } 1,4^\circ = \frac{\Delta s}{20}$$



Como  $\Delta d$  é um ângulo muito pequeno ( $\Delta d = 1,4^\circ$ ),  
vale a aproximação:

$$\operatorname{tg} 1,4 \cong \frac{1,4}{60}$$

$$\text{Logo: } \frac{1,4}{60} = \frac{\Delta s}{20} \Rightarrow \Delta s \cong 0,47\text{cm}$$

Respostas: a) 30mm

b)  $i = 50^\circ$

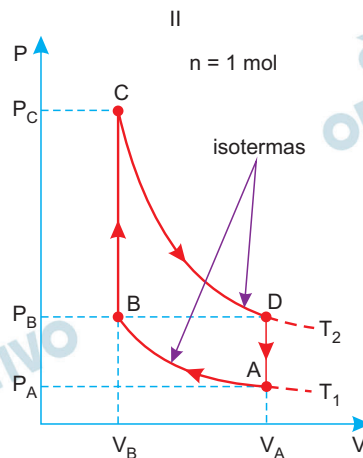
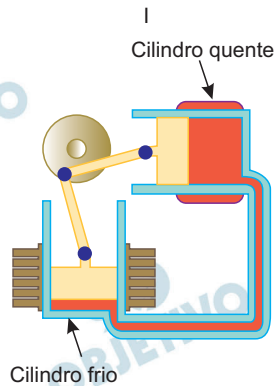
c)  $\Delta d \cong 1,4^\circ$

d)  $\Delta s \cong 0,47\text{cm}$

## F.4

O motor Stirling, uma máquina térmica de alto rendimento, é considerado um motor ecológico, pois pode funcionar com diversas fontes energéticas. A figura I mostra esquematicamente um motor Stirling com dois cilindros. O ciclo termodinâmico de Stirling, mostrado na figura II, representa o processo em que o combustível é queimado externamente para aquecer um dos dois cilindros do motor, sendo que uma quantidade fixa de gás inerte se move entre eles, expandindo-se e contraindo-se.

Nessa figura está representado um ciclo de Stirling no diagrama  $P \times V$  para um mol de gás ideal monoatômico. No estado A, a pressão é  $P_A = 4 \text{ atm}$ , a temperatura é  $T_1 = 27^\circ\text{C}$  e o volume é  $V_A$ . A partir do estado A, o gás é comprimido isotericamente até um terço do volume inicial, atingindo o estado B. Na isoterma  $T_1$ , a quantidade de calor trocada é  $Q_1 = 2.640 \text{ J}$ , e, na isoterma  $T_2$ , é  $Q_2 = 7.910 \text{ J}$ .



Determine

- o volume  $V_A$ , em litros;
- a pressão  $P_D$ , em atm, no estado D;
- a temperatura  $T_2$ .

Considerando apenas as transformações em que o gás recebe calor, determine

- a quantidade total de calor recebido em um ciclo,  $Q_R$ , em J.

Note e adote:

Calor específico a volume constante:  $C_V = 3 R/2$

Constante universal do gases:

$R = 8 \text{ J}/(\text{mol K}) = 0,08 \text{ atm } \ell / (\text{mol K})$

$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

$1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$

$1 \text{ m}^3 = 1000 \ell$

### Resolução

- a) Determinação do volume  $V_A$  pela equação de estado dos gases perfeitos (Clapeyron).

$$p_A V_A = nRT_1$$

$$V_A = \frac{nRT_1}{p_A}$$

$$V_A = \frac{1 \cdot 0,08 \cdot 300}{4} (\ell)$$

$$V_A = \frac{24}{4} (\ell)$$

$$V_A = 6 \ell$$

- b) Determinação da pressão  $p_B$  pela lei geral dos gases perfeitos na transformação isotérmica AB.

( $T_A = T_B = T_1 = 300\text{K}$ ) e com  $V_B = \frac{V_A}{3}$  :

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}$$

$$p_B = \frac{p_A V_A}{V_B}$$

$$p_B = \frac{4 \cdot V_A}{\frac{V_A}{3}} (\text{atm})$$

$$p_B = 12 \text{ atm}$$

$$p_D = p_B = 12 \text{ atm}$$

- c) Determinação da temperatura  $T_2$  pela lei geral dos gases perfeitos entre os pontos B e D, que possuem

pressões iguais, com  $V_B = \frac{V_A}{3}$ ,  $V_D = V_A$  e  $T_1 = 300\text{K}$ :

$$\frac{p_B V_B}{T_1} = \frac{p_D V_D}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{V_D T_1}{V_B}$$

$$T_2 = \frac{V_A \cdot 300}{\frac{V_A}{3}} (\text{K})$$

$$T_2 = 900\text{K}$$

- d) O gás é monoatômico ( $c_v = \frac{3}{2} R$ ) e a variação da energia interna em cada transformação é calculada por  $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$

Calor  $Q_1$  da compressão isotérmica AB ( $\tau_{AB} < 0$  e  $\Delta U_{AB} = 0$ ):

$$Q_1 = \tau_{AB} + \Delta U_{AB}$$

$$Q_1 = -\tau_{AB}$$

$$Q_1 = -2640\text{J} \text{ (calor cedido)}$$

Calor  $Q_{BC}$  do aquecimento isométrico BC ( $\tau_{BC} = 0$  e  $\Delta U_{BC} > 0$ ) entre  $T_1 = 300\text{K}$  e  $T_2 = 900\text{K}$ .

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC}$$

$$Q_{BC} = \frac{3}{2} nR (T_C - T_B)$$

$$Q_{BC} = 1,5 \cdot 1 \cdot 8 (900 - 300) \text{ (J)}$$

$$Q_{BC} = 12 \cdot 600 \text{ (J)}$$

$$Q_{BC} = 7200\text{J} \text{ (calor recebido)}$$

Calor  $Q_2$  da expansão isotérmica CD ( $\tau_{CD} > 0$  e  $\Delta U_{CD} = 0$ ):

$$Q_2 = \tau_{CD} \text{ (dado no enunciado)}$$

$$Q_2 = 7910\text{J} \text{ (calor recebido)}$$

Calor  $Q_{DA}$  do resfriamento isométrico DA ( $\tau_{DA} = 0$  e  $\Delta U_{DA} < 0$ ) entre  $T_1 = 300\text{K}$  e  $T_2 = 900\text{K}$ :

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA}$$

$$Q_{DA} = \frac{3}{2} nR (T_A - T_D)$$

$$Q_{DA} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8 (300 - 900) \text{ (J)}$$

$$Q_{DA} = 12 (-600) \text{ (J)}$$

$$Q_{DA} = -7200\text{J} \text{ (calor cedido)}$$

Como apenas nas transformações BC e CD o calor é recebido, temos:

$$Q_{\text{recebido}} = Q_{BC} + Q_2$$

$$Q_{\text{recebido}} = 7200 + 7910 \text{ (J)}$$

$$Q_{\text{recebido}} = 15110\text{J}$$

- Respostas: a) 6 ℓ      b) 12 atm  
c) 900K      d) 15110J

## F.5

Um alto-falante emitindo som com uma única frequência é colocado próximo à extremidade aberta de um tubo cilíndrico vertical preenchido com um líquido. Na base do tubo, há uma torneira que permite escoar lentamente o líquido, de modo que a altura da coluna de líquido varie uniformemente no tempo. Partindo-se do tubo completamente cheio com o líquido e considerando apenas a coluna de ar criada no tubo, observa-se que o primeiro máximo de intensidade do som ocorre quando a altura da coluna de líquido diminui 5 cm e que o segundo máximo ocorre um minuto após a torneira ter sido aberta.

Determine

- o módulo da velocidade  $V$  de diminuição da altura da coluna de líquido;
- a frequência  $f$  do som emitido pelo alto-falante.  
Sabendo que uma parcela da onda sonora pode se propagar no líquido, determine
- o comprimento de onda  $\lambda$  deste som no líquido;
- o menor comprimento  $L$  da coluna de líquido para que haja uma ressonância deste som no líquido.

Note e adote:

Velocidade do som no ar:  $v_{\text{ar}} = 340\text{m/s}$ .

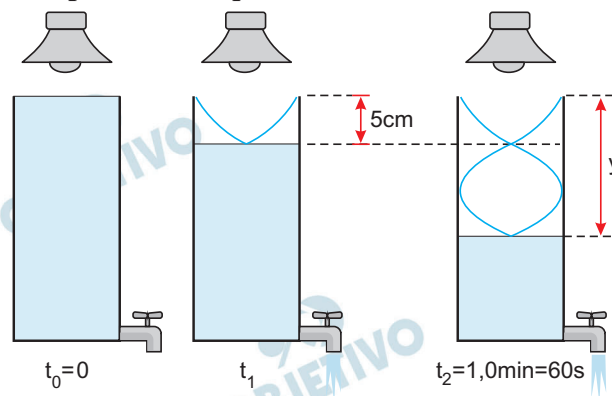
Velocidade do som no líquido:  $v_{\text{liq}} = 1700\text{ m/s}$ .

Considere a interface ar/líquido sempre plana.

A ressonância em líquidos envolve a presença de nós na sua superfície.

### Resolução

- a) **A coluna de ar no tubo entra em ressonância com o alto-falante formando uma onda estacionária dentro do tubo, com um ventre surgindo na extremidade aberta próxima ao alto-falante e um nó na superfície do líquido.**



Em  $t_1$  se estabelece o 1.º harmônico na coluna de ar

no tubo e temos  $\frac{\lambda_{\text{ar}}}{4} = 5\text{cm}$ .

$$\lambda_{\text{ar}} = 20\text{cm} = 0,2\text{m}$$

Em  $t_2 = 1,0$  min se estabelece o 2º harmônico na coluna de ar do tubo e temos:

$$y = \frac{3}{4} \lambda_{\text{ar}}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot 0,2\text{m}$$

$$y = 0,15\text{m}$$

O módulo  $V$  da velocidade com que o nível do líquido desce no tubo é dado por:

$$V = \frac{y}{\Delta t}$$

$$V = \frac{0,15}{60} \text{ (m/s)}$$

$$V = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

b) Da equação fundamental da ondulatória, temos no ar:

$$V = \lambda f$$

$$340 = 0,2 f$$

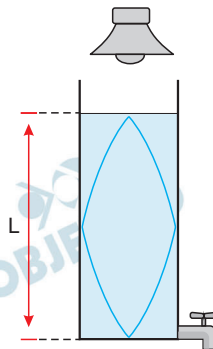
$$f = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

c) Lembrando-se de que na refração da onda sonora do ar para o líquido, a frequência não se altera, temos, no líquido:

$$1,7 \cdot 10^3 = \lambda \cdot 1,7 \cdot 10^3$$

$$\lambda = 1,0\text{m}$$

d) A coluna de líquido entra em ressonância com o alto-falante, formando uma onda estacionária no líquido dentro do tubo, com um nó surgindo na superfície livre do líquido próxima ao alto-falante e um nó na base do tubo. No 1º harmônico, o comprimento da coluna líquida é metade do comprimento de onda sonora no líquido:



$$L = \frac{\lambda}{2}$$

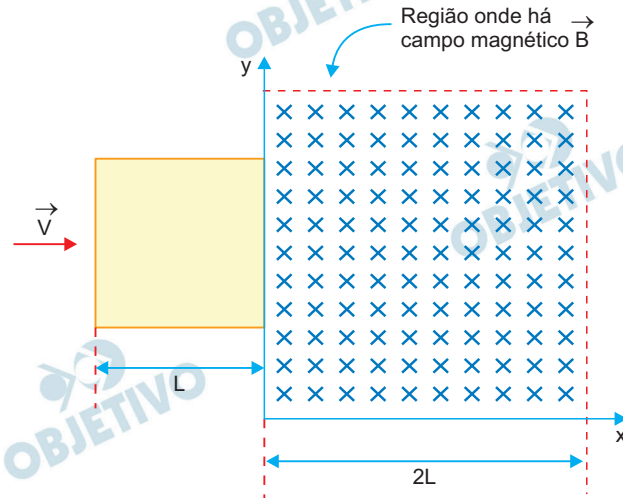
$$L = \frac{1,0\text{m}}{2}$$

$$L = 5 \cdot 10^{-1}\text{m}$$

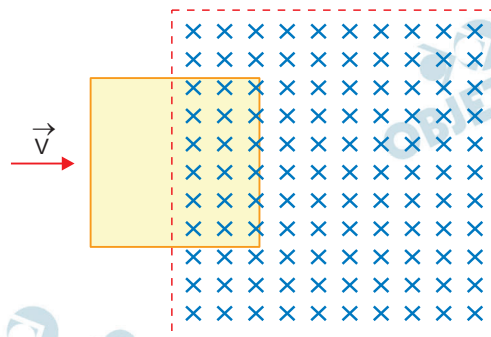
- Respostas: a)  $2,5 \cdot 10^{-3}\text{m/s}$   
b)  $1,7 \cdot 10^3\text{Hz}$   
c)  $1,0\text{m}$   
d)  $5 \cdot 10^{-1}\text{m}$

## F.06

Uma espira quadrada, de lado  $L$ , constituída por barras rígidas de material condutor, de resistência elétrica total  $R$ , se desloca no plano  $xy$  com velocidade  $\vec{v}$  constante, na direção do eixo  $x$ . No instante  $t = 0$ , representado na figura, a espira começa a entrar em uma região do espaço, de seção reta quadrada, de lado  $2L$ , onde há um campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular a  $\vec{v}$ ; a velocidade da espira é mantida constante por meio da ação de um agente externo. O campo  $\vec{B}$  é uniforme, constante e tem a direção do eixo  $z$ , entrando no plano  $xy$ .



- a) A figura da página de respostas representa a situação para o instante  $t_1 = L/(2v)$ . Indique nessa figura o sentido da corrente elétrica  $i_1$  que circula pela espira e determine o seu valor.



- b) Determine a corrente  $i_2$  na espira para o instante  $t_2 = (3L)/(2v)$ .  
 c) Determine a força eletromagnética  $\vec{F}$  (módulo, direção e sentido) que atua na espira no instante  $t_3 = (5L)/(2v)$ .

Note e adote:

Força eletromotriz na espira parcialmente imersa no campo magnético:  $\varepsilon = L B v$



## Resolução

a) Para  $t_1 = \frac{L}{2v}$ , a distância  $d_1$  percorrida pela espi-

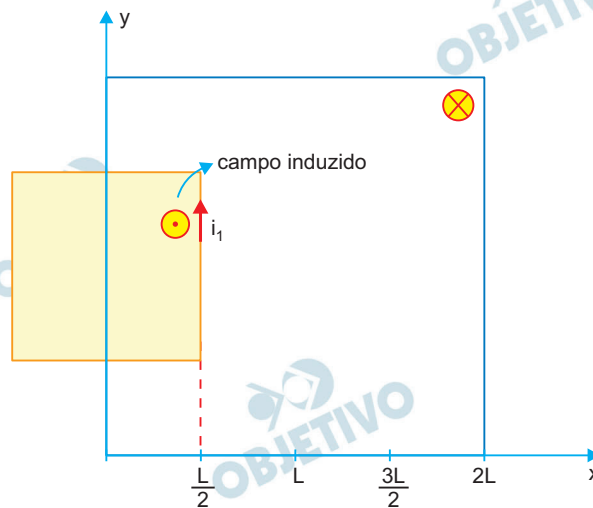
ra dentro do campo magnético será dada por:

$$d_1 = v \cdot t_1$$

$$d_1 = v \cdot \frac{L}{2v}$$

$$d_1 = \frac{L}{2}$$

Assim, à medida que a espira penetra no campo magnético, vai aumentando o fluxo magnético indutor que a atravessa. De acordo com a Lei de Lenz, deve surgir uma corrente elétrica induzida ( $i_1$ ), que gera um fluxo induzido que se opõe à variação do fluxo indutor, assim:



A corrente elétrica ( $i_1$ ) deve ter sentido anti-horário.

Cálculo da intensidade de  $i_1$ :

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Sendo  $\varepsilon = BLv$ , temos:

$$i_1 = \frac{BLv}{R}$$

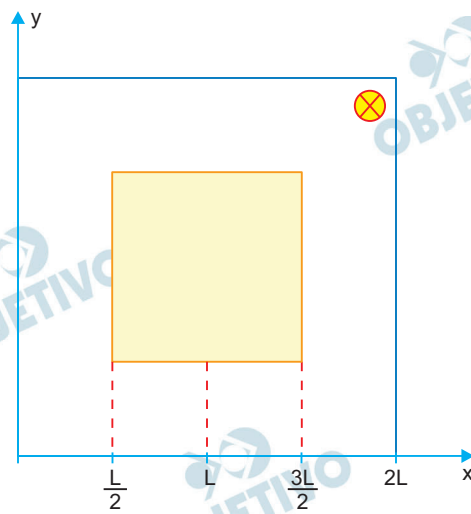
b) Para  $t_2 = \frac{3L}{2v}$ , a distância  $d_2$  percorrida pela espi-

ra será dada por:

$$d_2 = v \cdot t_2$$

$$d_2 = v \cdot \frac{3L}{2v}$$

$$d_2 = 1,5L$$



Nessa situação, a espira encontra-se totalmente imersa no campo magnético. Não há variação do fluxo magnético e, conseqüentemente, não haverá corrente elétrica induzida, assim:

$$i_2 = 0$$

- c) Para  $t_3 = \frac{5L}{2v}$ , a distância  $d_3$  percorrida pela espira,

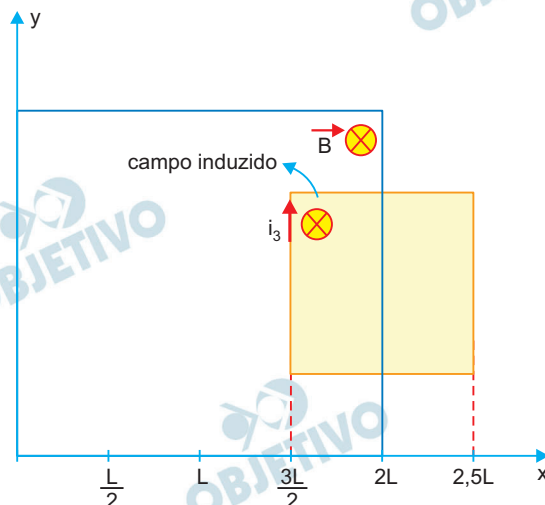
dentro do campo magnético, será dada por:

$$d_3 = v \cdot t_3$$

$$d_3 = v \cdot \frac{5L}{2v}$$

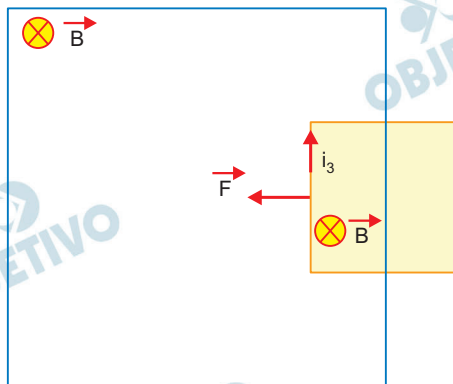
$$d_3 = 2,5L$$

Nessa situação, a espira está saindo do campo magnético, diminuindo o fluxo magnético indutor que a atravessa. De acordo com a Lei de Lenz, deve surgir uma corrente elétrica induzida ( $i_3$ ), que gera um fluxo induzido que se opõe à variação do fluxo magnético indutor, assim:



A corrente elétrica ( $i_3$ ) deve ter sentido horário. Podemos, agora, determinar a direção e o sentido da força eletromagnética resultante ( $\vec{F}$ ) na haste deslizante que ainda se encontra imersa no campo magnético.

Utilizando-se a regra da mão esquerda, temos:



Nas barras horizontais, as forças magnéticas anulam-se.

Cálculo do módulo de  $\vec{F}$ :

$$F = B i_3 L$$

$$\text{em que: } i_3 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Portanto:

$$F = B \cdot \frac{BLv}{R} \cdot L$$

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Respostas: a) sentido anti-horário;  $i_1 = \frac{BLv}{R}$

b)  $i_2 = 0$

c)  $F = \frac{B^2 L^2 v}{R}$

Direção e sentido indicados na figura

## Q.01

Pequenas mudanças na estrutura molecular das substâncias podem produzir grandes mudanças em seu odor. São apresentadas as fórmulas estruturais de dois compostos utilizados para preparar aromatizantes empregados na indústria de alimentos.



Esses compostos podem sofrer as seguintes transformações:

- I. O álcool isoamílico pode ser transformado em um éster que apresenta odor de banana. Esse éster pode ser hidrolisado com uma solução aquosa de ácido sulfúrico, liberando odor de vinagre.
- II. O ácido butírico tem odor de manteiga rançosa. Porém, ao reagir com etanol, transformase em um composto que apresenta odor de abacaxi.

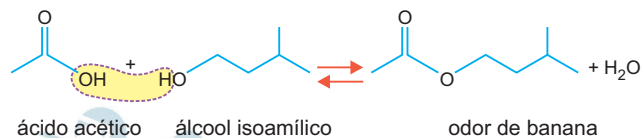
a) Escreva a fórmula estrutural do composto que tem odor de banana e a do composto com odor de abacaxi.

composto com odor de banana	composto com odor de abacaxi

b) Escreva a equação química que representa a transformação em que houve liberação de odor de vinagre.

### Resolução

a) A reação do ácido acético (etanoico) com o álcool isoamílico (composto I) é:

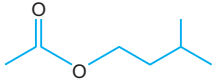



**O éster formado está na essência de banana. Esse éster sofre hidrólise formando ácido acético, componente do vinagre.**

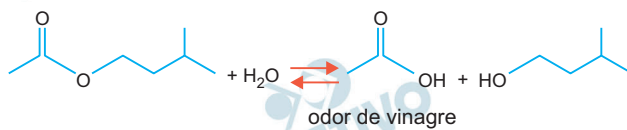
A reação do ácido butírico (composto II) com etanol é:



**O éster formado está na essência de abacaxi.**

composto com odor de banana	composto com odor de abacaxi
	

b) A reação da hidrólise do éster presente na banana é:

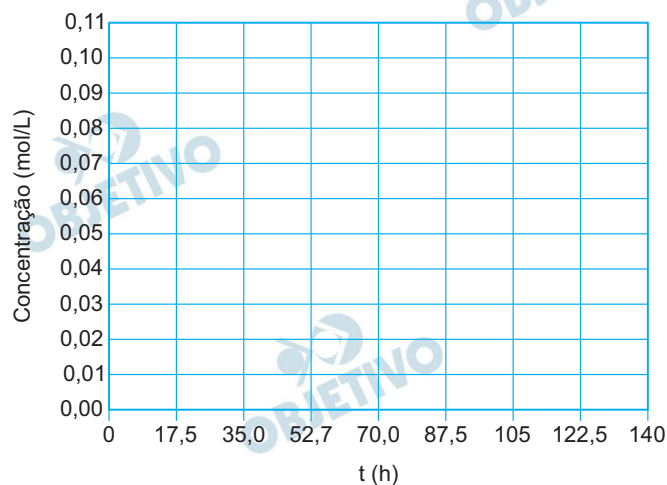


## Q.02

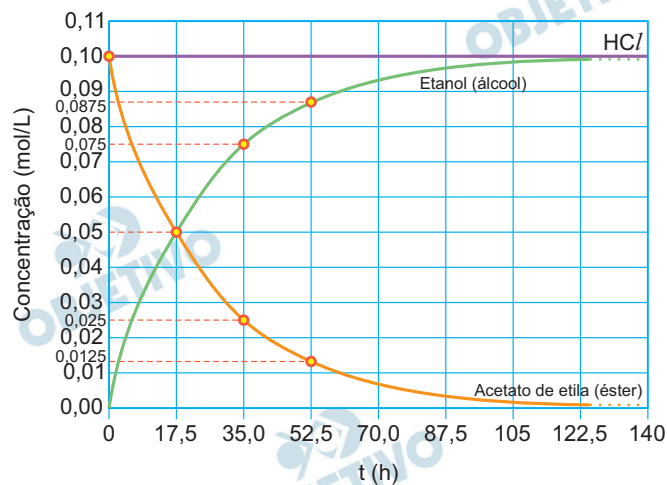
A reação química de hidrólise de ésteres de ácidos carboxílicos é catalisada por ácidos e segue uma cinética de primeira ordem.

Uma solução aquosa 0,1 mol/L de acetato de etila praticamente não apresenta hidrólise em  $\text{pH} = 7$ ; porém, ao se adicionar  $\text{HCl}$  até a concentração de 0,1 mol/L, observa-se hidrólise, de modo que a concentração de éster cai pela metade a cada 17,5 horas, ou seja, o tempo de meia-vida da reação de hidrólise do acetato de etila é considerado constante e igual a 17,5 horas. A reação prossegue até praticamente todo o éster reagir.

No quadriculado da folha de respostas, esboce os gráficos das concentrações de éster (acetato de etila), de álcool (etanol) e de  $\text{HCl}$  ao longo do tempo para essa reação, nomeando a curva referente a cada composto. Justifique sua resposta.



### Resolução



Considerando a estequiometria da reação de hidrólise do acetato de etila (demonstrada a seguir), percebe-se uma relação de 1 para 1, portanto para cada mol de acetato de etila consumido, forma-se 1 mol de etanol. O ácido clorídrico ( $\text{HCl}$ ) atua como catalisador, o que significa que participa do mecanismo da reação, mas

é regenerado. Assim, a sua concentração não se altera em função do tempo.

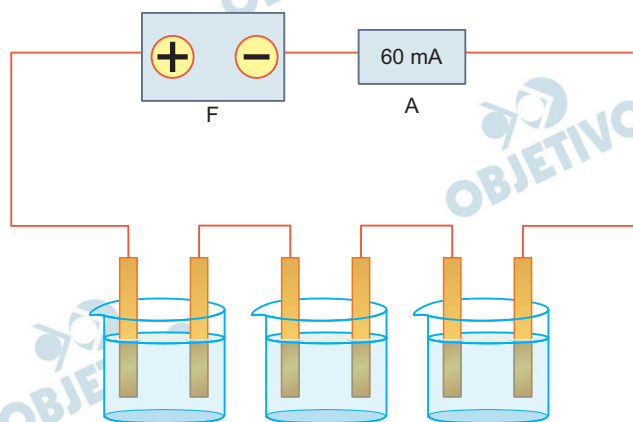
Reação de hidrólise do acetato de etila em meio ácido:



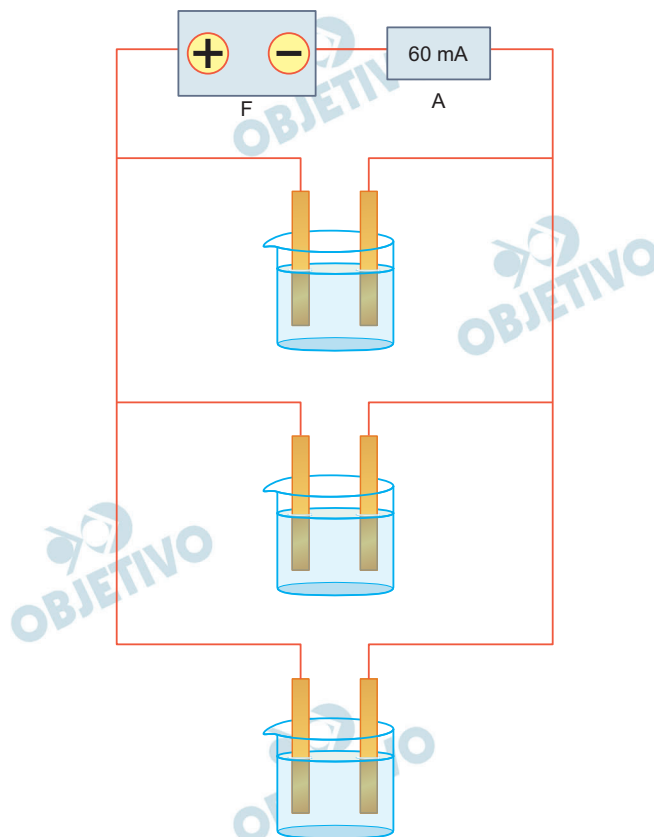
## Q.03

Um estudante realizou um experimento para verificar a influência do arranjo de células eletroquímicas em um circuito elétrico. Para isso, preparou 3 células idênticas, cada uma contendo solução de sulfato de cobre (II) e dois eletrodos de cobre, de modo que houvesse corrosão em um eletrodo e deposição de cobre em outro. Em seguida, montou, sucessivamente, dois circuitos diferentes, conforme os Arranjos 1 e 2 ilustrados. O estudante utilizou uma fonte de tensão (F) e um amperímetro (A), o qual mediu uma corrente constante de 60 mA em ambos os casos.

Arranjo 1



Arranjo 2



- a) Considere que a fonte foi mantida ligada, nos arranjos 1 e 2, por um mesmo período de tempo. Em qual dos arranjos o estudante observará maior massa nos eletrodos em que ocorre deposição? Justifique.



- b) Em um outro experimento, o estudante utilizou apenas uma célula eletroquímica, contendo 2 eletrodos cilíndricos de cobre, de 12,7 g cada um, e uma corrente constante de 60 mA. Considerando que os eletrodos estão 50 % submersos, por quanto tempo o estudante pode deixar a célula ligada antes que toda a parte submersa do eletrodo que sofre corrosão seja consumida?

Note e adote:

Considere as três células eletroquímicas como resistores com resistências iguais.

Massa molar do cobre: 63,5 g/mol

1 A = 1 C/s

Carga elétrica de 1 mol de elétrons: 96500 C.

### Resolução

- a) Em cubas em série, a corrente elétrica (60 mA) é a mesma nas três cubas.

Em cubas em paralelo, a corrente elétrica será em cada cuba 20 mA (60 mA/3).

A massa depositada de Cu (s) será maior no arranjo 1, pois a massa depositada é diretamente proporcional à corrente elétrica utilizada.

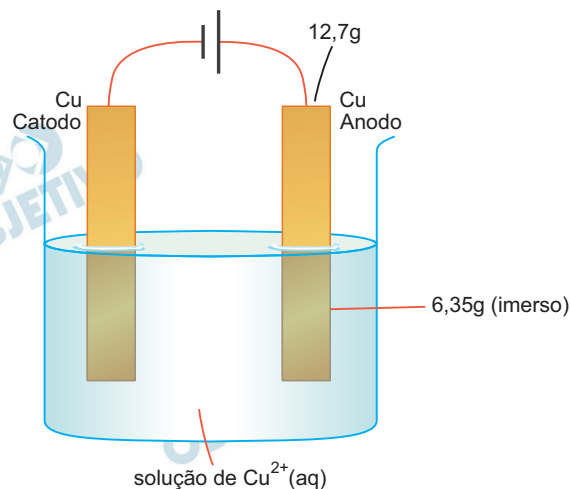
Maior  $i$  (intensidade da corrente elétrica)  $\rightarrow$  maior massa



$$Q = i \cdot t$$

$$m = \frac{i \cdot t \cdot 63,5}{2 \cdot 96\,500}$$

- b)



O metal Cu no anodo sofrerá oxidação de acordo com a equação:



$$63,5 \text{ g} \text{ ————— } 2 \cdot 96\,500 \text{ C}$$

$$6,35 \text{ g} \text{ ————— } Q$$

$$Q = 19\,300 \text{ C}$$

$$Q = i t$$

$$i = 60 \text{ mA} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$19\,300 \text{ C} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot t$$

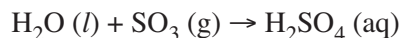
$$t = 321\,666,66 \text{ s}$$

A célula deve ficar ligada por um tempo menor que o valor acima.

## Q.04

Para investigar o efeito de diferentes poluentes na acidez da chuva ácida, foram realizados dois experimentos com os óxidos  $\text{SO}_3$  (g) e  $\text{NO}_2$  (g). No primeiro experimento, foram coletados 45 mL de  $\text{SO}_3$  em um frasco contendo água, que foi em seguida fechado e agitado, até que todo o óxido tivesse reagido. No segundo experimento, o mesmo procedimento foi realizado para o  $\text{NO}_2$ . Em seguida, a solução resultante em cada um dos experimentos foi titulada com  $\text{NaOH}$  (aq) 0,1 mol/L, até sua neutralização.

As reações desses óxidos com água são representadas pelas equações químicas balanceadas:



- Determine o volume de  $\text{NaOH}$  (aq) utilizado na titulação do produto da reação entre  $\text{SO}_3$  e água. Mostre os cálculos.
- Esse volume é menor, maior ou igual ao utilizado no experimento com  $\text{NO}_2$  (g)? Justifique.
- Uma das reações descritas é de oxidorredução. Identifique qual é essa reação e preencha a tabela na folha de respostas, indicando os reagentes e produtos das semirreações de oxidação e de redução.

Apresentam alteração no número de oxidação	Semirreação de oxidação	Semirreação de redução
Reagente		
Produto		

Note e adote:

Considere os gases como ideais e que a água contida nos frascos foi suficiente para a reação total com os óxidos.

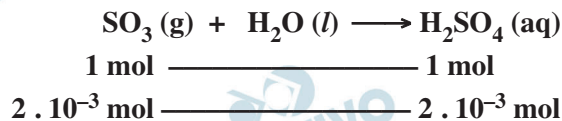
Volume de 1 mol de gás: 22,5 L, nas condições em que os experimentos foram realizados.

### Resolução

- a) Cálculo da quantidade de matéria de  $\text{SO}_3$ , presente nos 45 mL do gás (0,045 L):

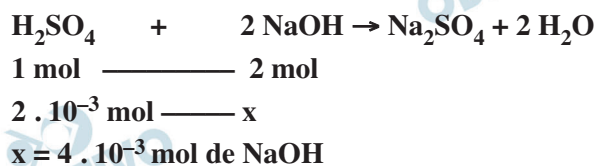
$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol de } \text{SO}_3 \text{ ————— } 22,5 \text{ L} \\ n \text{ ————— } 0,045 \text{ L} \\ n = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol de } \text{SO}_3 \end{array}$$

Ao dissolver  $\text{SO}_3$  em água ocorrerá a formação de  $2 \cdot 10^{-3}$  mol de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , segundo a equação:



Ao titular a solução com NaOH, teremos a neutralização do  $\text{H}_2\text{SO}_4$ .

Cálculo da quantidade de matéria de NaOH consumida na reação:

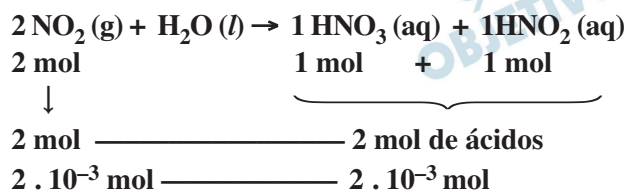


Cálculo do volume de NaOH (0,1 mol/L) gasto:

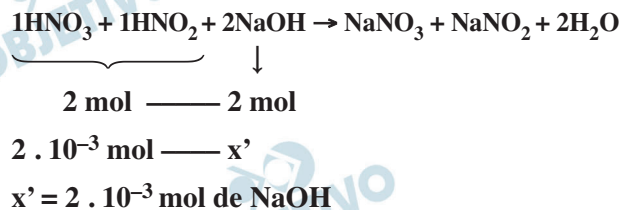
$$\begin{array}{l} 0,1 \text{ mol de NaOH ————— } 1 \text{ L} \\ 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol de NaOH ————— } y \\ y = 0,040 \text{ L} = 40 \text{ mL} \end{array}$$

- b) A quantidade de matéria de  $\text{NO}_2$  em 45 mL também será  $2 \cdot 10^{-3}$  mol.

Entretanto, dissolvendo  $\text{NO}_2$  em água, teremos:



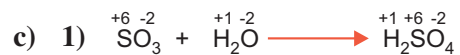
Ao titular com NaOH, teremos:



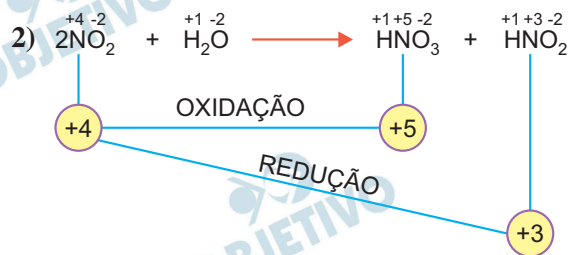
Cálculo do volume de NaOH (0,1 mol/L) gasto:

$$\begin{array}{l} 0,1 \text{ mol de NaOH ————— } 1 \text{ L} \\ 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol de NaOH ————— } y' \\ y' = 0,020 \text{ L} = 20 \text{ mL} \end{array}$$

O volume de NaOH gasto com o  $\text{SO}_3$  é maior que o volume de NaOH gasto com o  $\text{NO}_2$ .



Não é reação de oxidorredução.



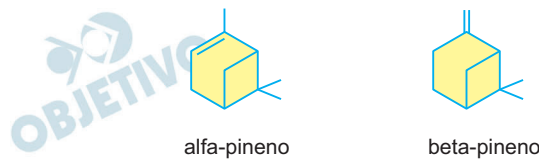
Trata-se de uma reação de auto-oxidorredução.

Completando a tabela:

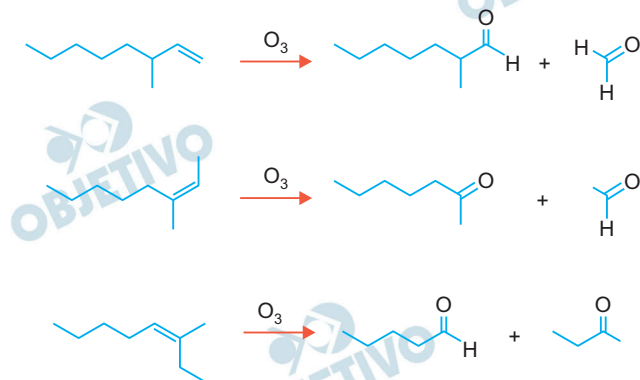
Apresentam alteração no número de oxidação	Semirreação de oxidação	Semirreação de redução
Reagente	$\text{NO}_2$	$\text{NO}_2$
Produto	$\text{HNO}_3$	$\text{HNO}_2$

## Q.05

O pineno é um composto insaturado volátil que existe sob a forma de dois isômeros, o alfa-pineno e o beta-pineno.



Em um laboratório, havia uma amostra de pineno, mas sem que se soubesse se o composto era o alfa-pineno ou o beta-pineno. Para resolver esse problema, um químico decidiu tratar a amostra com ozônio, pois a posição de duplas ligações em alcenos pode ser determinada pela análise dos produtos de reação desses alcenos com ozônio, como exemplificado nas reações para os isômeros de posição do 3-metil-octeno.



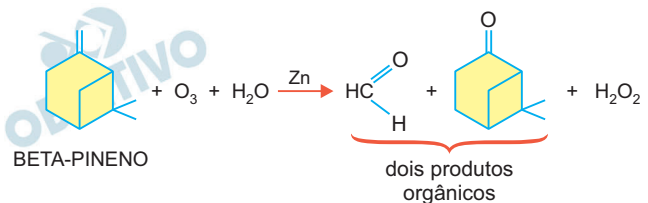
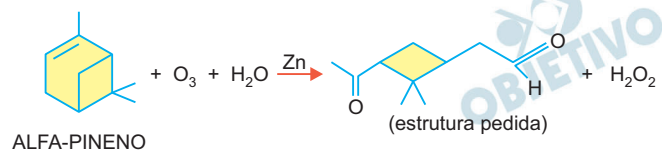
O químico observou então que a ozonólise da amostra de pineno resultou em apenas um composto como produto.

- Esclareça se a amostra que havia no laboratório era do alfa-pineno ou do beta-pineno. Explique seu raciocínio.
- Mostre a fórmula estrutural do composto formado.

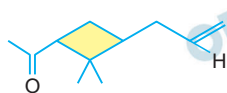
### Resolução

- De acordo com o enunciado, a ozonólise de compostos insaturados produz aldeídos, se o átomo de carbono da dupla ligação estiver ligado a átomos de hidrogênio, ou cetonas, se o átomo de carbono da dupla ligação estiver ligado a grupos orgânicos. O composto alfa-pineno, que possui dupla ligação entre os átomos de carbono do ciclo, ao sofrer ozonólise, irá produzir um único produto (com abertura do ciclo). A ozonólise do beta-pineno forma dois produtos orgânicos.**

A equação da reação da ozonólise é:



b) A fórmula é:



## Q.06

No acidente com o céσιο-137 ocorrido em 1987 em Goiânia, a cápsula, que foi aberta inadvertidamente, continha 92 g de cloreto de céσιο-137. Esse isótopo do céσιο sofre decaimento do tipo beta para báριο-137, com meia-vida de aproximadamente 30 anos.

Considere que a cápsula tivesse permanecido intacta e que hoje seu conteúdo fosse dissolvido em solução aquosa diluída de ácido clorídrico suficiente para a dissolução total.

- Com base nos dados de solubilidade dos sais, proponha um procedimento químico para separar o báριο do céσιο presentes nessa solução.
- Determine a massa do sal de báριο seco obtido ao final da separação, considerando que houve recuperação de 100 % do báριο presente na solução.

Note e adote:

Solubilidade de sais de báριο e de céσιο (g do sal por 100 mL de água, a 20 °C).

	Cloreto	Sulfato
Báριο	35,8	$2,5 \times 10^{-4}$
Céσιο	187	179

Massas molares:

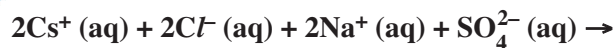
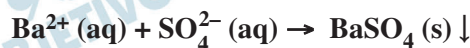
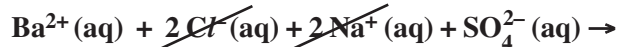
cloro ..... 35,5 g/mol

enxofre ..... 32 g/mol

oxigênio ..... 16 g/mol

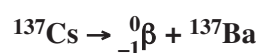
### Resolução

- A adição de ácido sulfúrico ou sulfatos solúveis (por exemplo  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ) a uma solução que contém  $\text{CsCl}$  e  $\text{BaCl}_2$  promove precipitação de  $\text{BaSO}_4$  que é menos solúvel que  $\text{Cs}_2\text{SO}_4$ .



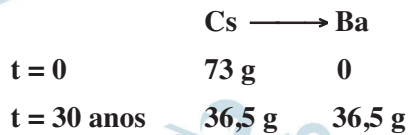
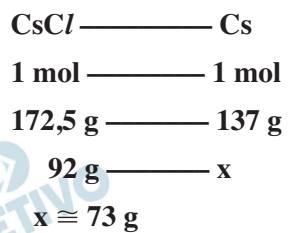
portanto não haverá precipitação.

- I) Formação do Ba-137 por decaimento  $\beta$  do Cs-137

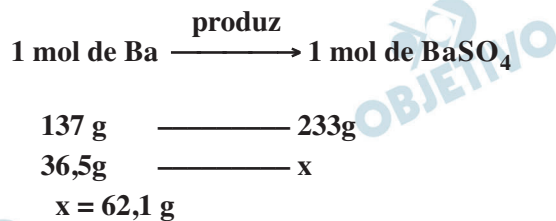




II) Cálculo da massa de bário produzida em 30 anos:

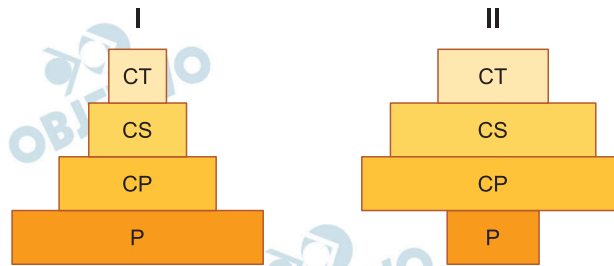


III) Cálculo da massa de  $\text{BaSO}_4$  produzida (considerando rendimento de 100%):



## B.01

As figuras I e II mostram pirâmides ecológicas de biomassa para os dois ecossistemas.

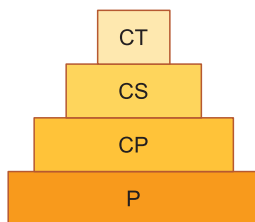


P: Produtor – CP: Consumidor primário – CS: Consumidor secundário  
CT: Consumidor terciário

- Indique um ecossistema que cada uma dessas pirâmides possa representar.
- Desenhe as pirâmides de energia correspondentes às pirâmides de biomassa, para os dois ecossistemas indicados.

### Resolução

- A pirâmide de biomassa I representa um ecossistema terrestre, enquanto a pirâmide de biomassa II representa um ecossistema aquático no qual o produtor (fitoplâncton), com menor biomassa, reproduz-se rapidamente e supre as necessidades alimentares dos consumidores primários (zooplâncton), com maior biomassa.
- Em ambos os ecossistemas (aquático e terrestre), a pirâmide de energia é a mesma. Ela revela maior quantidade de energia no nível trófico dos produtores. Essa energia vai diminuindo ao longo da cadeia alimentar a partir dos produtores. Essa pirâmide está representada abaixo:



## B.02

Caminhando por uma floresta, um estudante deparou com diversidade de habitats e de grupos de plantas: árvores altas, como a araucária (ou pinheiro-do-paraná), e árvores frutíferas menores, como a pitangueira, ambas crescendo sob pleno sol; também encontrou muitas samambaias nas partes mais sombreadas da floresta; nos locais permanentemente úmidos do solo, havia musgos.

- Relacione os habitats das araucárias e dos musgos com os processos de absorção e condução de água nessas plantas.
- Na tabela da página de respostas, os grupos de plantas estão ordenados de acordo com seu surgimento na evolução das plantas terrestres. Complete a tabela: entre as plantas observadas pelo estudante, identifique representantes dos grupos listados na tabela; aponte uma estrutura que represente novidade evolutiva, diferenciando cada grupo do anterior.

### Resolução

- As araucárias são plantas presentes em habitats terrestres e ensolarados e possuem um sistema radicular muito desenvolvido para a absorção de água, por osmose. A condução dessa água no interior do vegetal, da raiz em direção às folhas, dá-se pelo xilema.**

**Os musgos são vegetais característicos de habitats terrestres úmidos e sombreados. Não apresentam raízes verdadeiras, mas sim rizoides que absorvem água do meio por osmose. Por serem plantas avasculares, o transporte de água ocorre de célula a célula também por osmose.**

Grupo de plantas	Planta representante	Novidade evolutiva
Briófita	Musgos	_____
Pteridófita	Samambaias	Sistema vascular (xilema e floema)
Gimnosperma	Araucária	Pólen, tubo polínico, óvulo e semente
Angiosperma	Pitangueira	Flor, fruto

## B.03

Gafanhotos alados (Orthoptera), formando nuvens, atacaram recentemente lavouras de mandioca, na região Norte do Brasil, trazendo prejuízos econômicos. Outra praga agrícola que vem causando danos para a economia é a lagarta-do-cartucho (Lepidoptera), que ataca plantações de milho e reduz a produção desse grão em até 50%.

- a) Como esses insetos são classificados quanto ao tipo de desenvolvimento e ao processo de metamorfose?
- b) Quais são as fases de desenvolvimento representadas pelo gafanhoto alado e pela lagarta?

### Resolução

- a) Os gafanhotos são insetos hemimetábolos, ou seja, possuem metamorfose parcial. Seu desenvolvimento é indireto, produzindo fases juvenis denominadas ninfas. A lagarta-do-cartucho do milho é uma larva, portanto, seu desenvolvimento é indireto. Este lepidóptero é holometábolo, pois possui metamorfose completa.

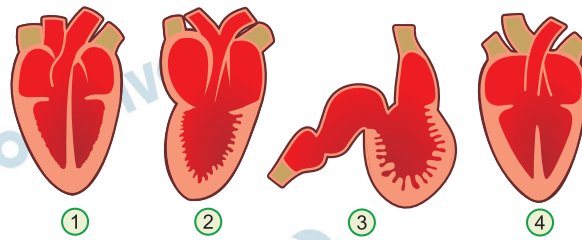
As fases do desenvolvimento do gafanhoto são: ovo, ninfas e imago (adulto).

As fases do desenvolvimento da lagarta-do-cartucho são: ovo, lagarta (larva), casulo (crisálida ou pupa) e imago (adulto).

- b) O gafanhoto alado é um adulto (imago) e a lagarta-do-cartucho é uma larva.

## B.04

Os quatro esquemas representam cortes longitudinais de corações de vertebrados.



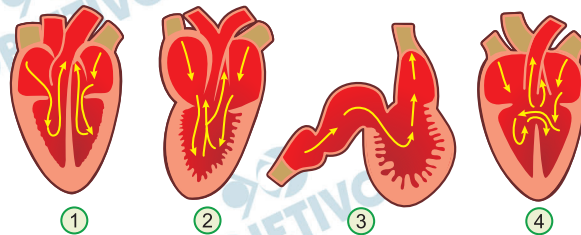
www.cardio-research.com. Adaptado.

- a) Identifique os grupos de vertebrados cujos corações estão representados pelos esquemas 1, 2, 3 e 4.
- b) Descreva o sentido do fluxo sanguíneo no interior de cada um desses corações e indique se neles ocorre mistura de sangue arterial e venoso.

### Resolução

- a) **Coração 1 é de mamífero ou ave.**  
**Coração 2 é de um anfíbio.**  
**Coração 3 é de um peixe.**  
**Coração 4 é de um réptil não crocodiliano.**

b)



Não ocorre mistura do sangue venoso com o arterial

Ocorre mistura do sangue venoso com o arterial

Não ocorre mistura do sangue venoso com o arterial

Ocorre mistura do sangue venoso com o arterial

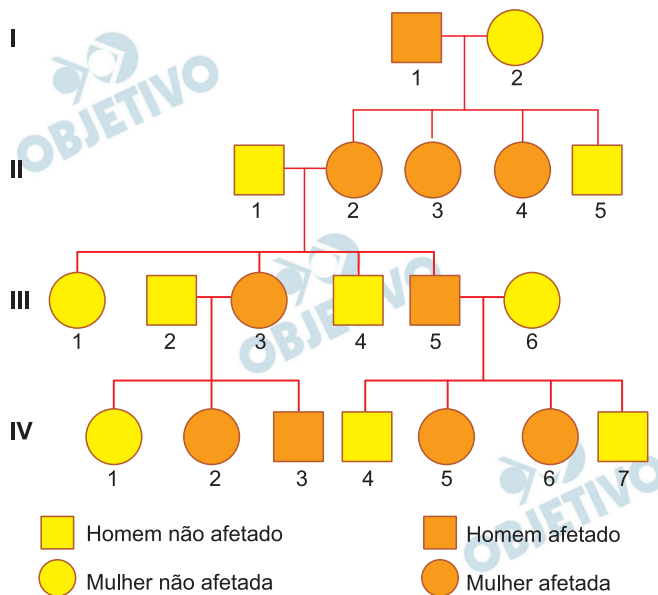
No coração I (mamífero ou ave) o sangue venoso passa do átrio direito ao ventrículo direito, dirigindo-se ao pulmão. O sangue arterial passa do átrio esquerdo ao ventrículo esquerdo, dirigindo-se ao corpo.

No coração 2 (anfíbio) o sangue venoso passa do átrio direito ao ventrículo, enquanto que o arterial passa do átrio esquerdo também ao ventrículo, onde se mistura ao venoso.

No coração 3 (peixes) o sangue passa do átrio ao ventrículo. No coração 4 (répteis não crocodilianos) o sangue venoso passa do átrio direito ao ventrículo e o arterial, do átrio esquerdo ao ventrículo. No ventrículo, parcialmente dividido, o sangue venoso e o sangue arterial misturam-se.

## B.05

O heredograma mostra pessoas afetadas por uma doença genética rara.



- a) É mais provável que essa doença tenha herança  
– autossômica ou ligada ao cromossomo X?  
– dominante ou recessiva?

Justifique suas respostas.

- b) Determinou-se que a doença nessa família é causada pela substituição de um único par de bases num determinado gene, o que levou à substituição de uma glicina por uma arginina em uma enzima.

Na tabela do código genético, estão relacionados os códons correspondentes à glicina e à arginina.

<b>Glicina</b>	GGU	GGC	GGA	GGG		
<b>Arginina</b>	CGU	CGC	CGA	CGG	AGA	AGG

G = Guanina; C = Citosina; A = Adenina; U = Uracila.

Com base nas informações da tabela, indique a alteração que possa ter ocorrido no gene, em uma das trincas de bases correspondentes à glicina, determinando sua substituição por arginina na enzima.

### Resolução

- a) O heredograma sugere a herança de um gene dominante e ligado ao cromossomo X. São evidências: As filhas de homens afetados ( $X^A y$ ) são todas afetadas ( $X^A X^-$ ), porque herdam o cromossomo  $X^A$  de seu pai. Os filhos do sexo masculino de homens afetados não manifestam a doença.
- b) A alteração ocorrida no gene que determinou a troca do aminoácido glicina por arginina foi a substituição da primeira base de um dos quatro primeiros códons da tabela fornecida. Houve uma substituição por transversão, porque a base citosina (C) foi trocada por guanina (G) no DNA.

Também pode ter ocorrido uma transição do tipo troca de C por T (timina) entre os dois últimos códons da glicina e os dois últimos códons da arginina, respectivamente.

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

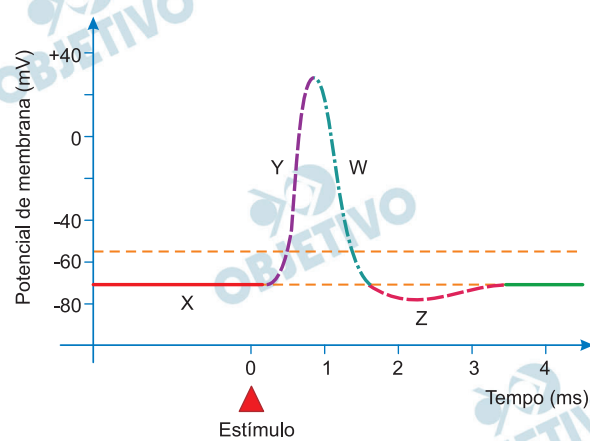
 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

## B.06

O gráfico representa modificações elétricas da membrana de um neurônio (potencial de membrana), mostrando o potencial de ação gerado por um estímulo, num dado momento.



- Identifique, nesse gráfico, as fases indicadas pelas letras X, Y, W e Z.
- A esclerose múltipla é uma doença autoimune, em que ocorre dano à bainha de mielina. Que efeito tem essa desmielinização sobre a condução do impulso nervoso?

### Resolução

- X indica o potencial de repouso.**  
**Y indica a despolarização.**  
**W indica a repolarização.**  
**Z indica a hiperpolarização e o retorno ao potencial de repouso.**
- A bainha de mielina aumenta a velocidade de propagação do impulso nervoso. A desmielinização do neurônio ocasiona a diminuição dessa velocidade, comprometendo a fisiologia da condução nervosa.**



# H.01

## Estimativa da população indígena da América na época do contato europeu

Região	População estimada	Percentual em relação à população total da América
América do Norte	4.400.000	7,7
México	21.400.000	37,3
América Central	5.650.000	9,9
Caribe	5.850.000	10,2
Andes	11.500.000	20,1
Planícies da América do Sul	8.500.000	14,8
<b>Total</b>	<b>57.300.000</b>	<b>100,0</b>

Stuart B. Schwartz & James Lockhart, **A América Latina na época colonial**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2002.

Com base nos dados fornecidos pela tabela,

- explique as razões da distribuição geográfica desigual da população indígena no hemisfério americano no momento do contato europeu;
- compare as unidades políticas indígenas do México com as dos Andes, citando ao menos um padrão comum e uma divergência entre elas.

### Resolução

a) **Peculiaridades das condições de formação dos diversos grupos populacionais, com destaque para as civilizações surgidas no México e na região dos Andes. Nessas regiões, foram desenvolvidas técnicas mais avançadas para a produção de alimentos, como instrumentos apropriados, confeccionados em pedra ou madeira, construção de canais de irrigação, utilização das “chinampas” e preparação de terraços para cultivo nas encostas.**

b) **Comparando astecas e maias (fixados no México) com incas (fixados nos Andes), é possível apresentar, como padrões comuns, a existência de governos teocráticos e sociedades hierarquizadas, a importância da agricultura de subsistência, com base no cultivo do**

milho, e a prática do comércio. Como divergência entre esses grupos, podemos citar a unidade política e a centralização dos Impérios Inca e Asteca, em contraste com a organização dos maias em cidades-Estado.

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO



Martin van Meytens, **Banquete de coroação de José II**. Óleo sobre tela, século XVIII. Detalhe.

Integrante da poderosa família dos Habsburgos, José II foi coroado imperador da Áustria em 1765, um dos mais vigorosos centros da cultura europeia no século XVIII.

- A partir de elementos representados na pintura, aponte e explique duas características das sociedades europeias no período.
- Explique por que José II é considerado um déspota esclarecido.

### **Resolução**

a) Na Europa Moderna (o que inclui o século XVIII, focalizado na ilustração), predominou a estrutura política, econômica e social conhecida como “Antigo Regime”, caracterizada, entre outros aspectos, pelo absolutismo monárquico; este é evidenciado na pintura pelo destaque dado à figura do imperador. Ainda a partir de elementos fornecidos pelo trabalho de van Meytens, é possível ressaltar a importância da nobreza e do clero – únicos estamentos presentes na cena – como grupos privilegiados e participantes do controle do Estado. Complementarmente, a ausência de representantes da burguesia e das classes populares no evento pode ser considerada indicativa da posição secundária desses grupos na hierarquia social da época.

b) Porque, embora mantivesse a estrutura política absolutista, empreendeu reformas progressistas sob influência da ideologia iluminista. Apesar da resistência encontrada, realizou mudanças expressivas nos territórios dominados pelos Habsburgos. As mais importantes foram a abolição da servidão, a obrigatoriedade do ensino fundamental, o acesso dos não católicos a atividades que até então lhes eram vedadas e a interferência na organização eclesiástica, suprimindo determinadas ordens monásticas e alterando o currículo dos seminários. Por essas e outras realizações, José II é considerado o mais esclarecido dos governantes do período.

## H.03

*A Índia exporta para a China vastas quantidades de ópio, para cujo cultivo possui facilidades peculiares. O ópio pode ser produzido em Bengala melhor e mais barato do que em qualquer outra parte do mundo; e a China oferece um mercado quase que ilimitado em suas dimensões. O gosto por essa droga espalhou-se pelo império, a despeito das severas regulações para sua exclusão, e se diz que ele entrou no próprio palácio. Não obstante o consumo desse estimulante pernicioso eventualmente ser reprimido de um ponto de vista moral, é certo que ele promove diversos objetos que são igualmente desejáveis tanto pela Índia como pela Inglaterra. A Índia, ao exportar ópio, auxilia o fornecimento de chá à Inglaterra. A China, ao consumir ópio, facilita as operações de receita entre a Índia e a Inglaterra. A Inglaterra, ao consumir chá, contribui para aumentar a demanda por ópio indiano.*

Edward Thornton, **India, its state and prospects.**

Londres: Parbury, Allen & Co., 1835. Adaptado.

- a) Indique como o texto caracteriza a cadeia mercantil do ópio e qual sua importância para a economia inglesa do século XIX e para as relações coloniais entre Grã-Bretanha e Índia.
- b) Identifique e explique um conflito posterior a 1835 que se relacione diretamente aos processos descritos no texto.

### **Resolução**

- a) **Cadeia mercantil: o ópio produzido na Índia era vendido à China, que o consumia. Importância do ópio para a economia inglesa do século XIX: participação de comerciantes ingleses na intermediação dos negócios de ópio entre Índia e China. As rendas auferidas pela Índia com a venda de ópio à China e de chá à Inglaterra atraíram a cobiça da Grã-Bretanha, que impôs sua dominação colonial ao subcontinente indiano.**
- b) **Primeira Guerra do Ópio (1840-42), desencadeada pela Inglaterra contra a China quando esta proibiu a venda daquele entorpecente em território chinês.**

## H.04

*Migrar, portanto, tem sempre um sentido ambíguo – como uma imposição das condições econômicas e sociais ou ambientais – e, nesse caso, ela aparece no mais das vezes como um dos mais fortes elementos que explicariam uma destinação do ser nordestino, mas também como uma escolha contra a miséria e a pobreza da vida no sertão. Migrar é, em última instância, dizer não à situação em que se vive, é pegar o destino com as próprias mãos, resgatar sonhos e esperanças de vida melhor ou mesmo diferente. O problema está no fato de que, numa vasta produção discursiva, retirou-se do migrante a sua condição de sujeito, como se migrar não fosse uma escolha, como se ele não tivesse vontade própria. Migrar pode ser entendido como estratégia não só para minimizar as penúrias do cotidiano, mas também para buscar um lugar social onde se possa driblar a exclusão pretendida pelas elites brasileiras através de seus projetos modernizantes.*

Isabel C. M. Guillen. Seca e migração no Nordeste: Reflexões sobre o processo de banalização de sua dimensão histórica.

**Trabalhos para Discussão** nº 111. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, 2001. Adaptado.

- a) Cite uma obra literária e um filme que tenham tratado do fenômeno mencionado no texto.
- b) Identifique as motivações dos fluxos migratórios de nordestinos para a região Norte, na segunda metade do século XIX, e para a região Sudeste, na segunda metade do século XX.

### **Resolução**

a) **Obras literárias:** *Vidas Secas*, de Graciliano Ramos, e *Morte e Vida Severina*, de João Cabral de Melo Neto. **Filme:** *Central do Brasil*, de Walter Salles.

b) **Motivações para a saída dos nordestinos de seus locais de origem:** miséria resultante da estrutura fundiária dominante no Nordeste e efeitos provocados pelo flagelo da seca. **Fatores de atração para a migração dos nordestinos:** na segunda metade do século XIX, a exploração da borracha; na segunda metade do século XX, a busca de colocação na indústria do Sudeste.

## H.05

Em 14 de maio de 1930, um jornalista argentino compôs a seguinte crônica, referindo-se à abolição da escravidão no Brasil:

*Hoje almoçando na companhia do senhor catalão cujo nome não vou dizer por razões que os leitores podem adivinhar, ele me disse:*

– *13 de maio é festa nacional...*

*Ah! É mesmo? Continuei botando azeite na salada.*

– *Festa da abolição da escravatura.*

– *Ah, que bom.*

*E como o assunto não me interessava especialmente, dedicava agora minha atenção a dosar a quantidade de vinagre que colocava na verdura.*

– *Semana que vem fará 42 anos que foi abolida a escravidão.*

*Dei tamanho pulo na cadeira, que metade da vinagreira foi parar na salada...*

– *Como disse? – repliquei espantado.*

– *Sim, 42 anos, sob a regência de dona Isabel de Bragança, aconselhada por Benjamin Constant. Dona Isabel era filha de Dom Pedro II.*

– *Quarenta e dois anos? Não é possível...*

– *13 de maio de 1888, menos 1930: 42 anos...*

– *Quer dizer que...*

– *Que qualquer negro de 50 anos que você encontrar hoje pelas ruas foi escravo até os 8 anos de idade; o negro de 60 anos, escravo até os 18 anos.*

– *Não será possível! O senhor deve estar enganado. Não será o ano de 1788... Olhe: acho que o senhor está enganado. Não é possível.*

– *Bom, se não acredita em mim, pode averiguar por aí.*

Roberto Arlt. **Águas-fortes cariocas**. Rio de Janeiro: Rocco, 2013. Tradução: Gustavo Pacheco.

- Identifique e explique o estranhamento do cronista argentino.
- Aponte e explique duas características do processo de abolição da escravidão no Brasil.

### **Resolução**

a) Sendo o narrador um argentino, oriundo de uma sociedade em que a escravidão teve pouca significação, é compreensível que tenha experimentado uma sensação de estranhamento ao saber quão longa foi a duração do escravismo no Brasil.

b)

I) O processo de supressão da escravatura no Brasil transcorreu de forma gradual e pela via legislativa, por meio de leis sucessivas: Lei Eusébio de Queirós (1850), Lei do Ventre Livre (1871), Lei dos Sexagenários (1885) e Lei Áurea (1888).

II) Houve uma intensa campanha abolicionista que, além de veiculada pela imprensa e presente no Parlamento, envolveu parte da sociedade, inclusive com atos de resistência à instituição escravista.



## H.06

*Come ananás, mastiga perdiz.*

*Teu dia está prestes, burguês.*

Vladimir Maiakóvski. **Come ananás**, 1917.

*Cidadão fiscal de rendas! Desculpe a liberdade.*

*Obrigado... Não se incomode... Estou à vontade.*

*A matéria que me traz é algo extraordinária:*

*O lugar do poeta da sociedade proletária.*

*Ao lado dos donos de terras e de vendas*

*estou também citado por débitos fiscais.*

*Você me exige 500 rublos por 6 meses e mais*

*(...)*

*Cidadão fiscal de rendas, eu encerro.*

*Pago os 5 e risco todos os zeros.*

*Tudo o que quero é um palmo de terra*

*ao lado dos mais pobres camponeses e obreiros.*

*Porém se vocês pensam que se trata apenas*

*de copiar palavras a esmo,*

*eis aqui, camaradas, minha pena,*

*podem escrever vocês mesmos!*

Vladimir Maiakóvski. **Conversa sobre poesia com o fiscal de rendas**, 1926.

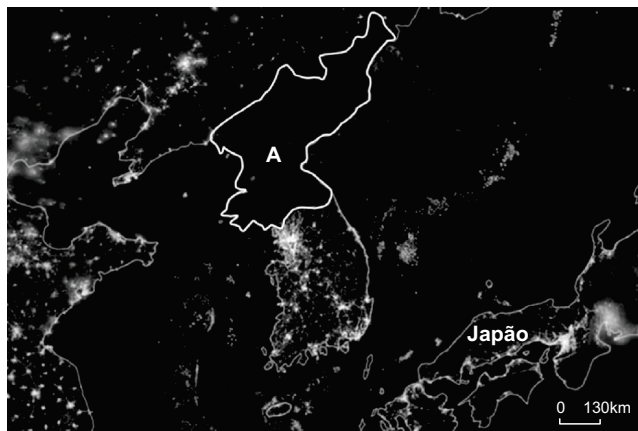
- Indique duas características da produção cultural na Rússia, nos anos posteriores à Revolução de 1917.
- Identifique e comente uma crítica e uma proposta de mudança presentes nos dois poemas.

### **Resolução**

- Intensa atividade cinematográfica com objetivos propagandísticos e criação de um estilo artístico – o “realismo socialista” –, que instrumentalizou a arte por meio de uma produção figurativa, voltada para a exaltação da Revolução de Outubro, do regime bolchevique e de suas realizações.**
- Crítica ao modo de vida burguês e a sua desigualdade em relação às massas. Proposta de mudança: igualitarismo social, a ser alcançado por meio da supressão das diferenças econômicas.**

# G.01

Observe, na imagem noturna obtida por satélite, os limites territoriais do país A e países fronteiriços.



www.exame.com.br. 25/02/2014. Adaptado.

- Identifique o país A e cite uma razão para o fato de esse país, comparativamente a seus fronteiriços, aparecer na imagem como se estivesse às escuras.
- Explique, citando ao menos dois argumentos de ordem geopolítica, por que os EUA e alguns países da Europa Ocidental consideram esse país uma ameaça global e regional.

## Resolução

- O país A é a República Popular Democrática da Coreia ou Coreia do Norte.

A escuridão aparente do território norte-coreano, comparado com seus vizinhos, China – na porção setentrional – e Coreia do Sul na porção meridional, deve-se ao fato de o país ser economicamente menos desenvolvido, pouco urbanizado, apresentar menor desenvolvimento da infraestrutura energética, decorrente de seu menor padrão de consumo, da menor amplitude de seu parque industrial, da prevalência de população rural – fator de dispersão da população –, além do racionamento na oferta e no consumo de energia – direcionada para os incipientes setores produtivos.

- A Coreia do Norte é considerada uma ameaça global e regional pelos Estados Unidos e por seus aliados europeus ocidentais por desenvolver um programa nuclear bélico, de forma mais intensa, e de ter-se retirado do TNP – Tratado para a Não Proliferação de Armas Nucleares – e por desenvolver tecnologia de armamentos, especialmente mísseis de médio e de longo alcance, além de tecnologia para lançamento a partir de plataformas móveis – submarinos – e por testar armamentos em áreas de fronteira, inclusive; por violar direitos da pessoa humana, desrespeitando legislação internacional e as

determinações da ONU – Organização das Nações Unidas.

A Coreia do Norte constitui uma ameaça, pois sua política externa – considerada hostil à paz mundial – pode levar a um conflito que envolveria imediatamente o Extremo Oriente asiático – Japão, Coreia do Sul, China, Rússia e, por extensão, os Estados Unidos, com potencial para a disseminação por todo o mundo.

## G.02

*A Lei de Terras, de 1850, e a legislação subsequente codificaram os interesses combinados de fazendeiros e comerciantes, instituindo as garantias legais e judiciais de continuidade do padrão de exploração da força de trabalho, mesmo que o cativo entrasse em colapso. Na iminência de transformações nas condições do regime escravista, que poderiam comprometer a sujeição do trabalhador, criavam as peculiares condições que garantissem, ao menos, a sujeição do trabalho na produção do café.*

José de Souza Martins,  
**O cativo da terra**, 1979. Adaptado.

- a) Considerando o contexto social de transformações a que se refere o autor, explique os interesses combinados de fazendeiros e comerciantes que se codificaram na promulgação da Lei de Terras de 1850.
- b) Cite e explique um impacto da abolição da escravidão em relação aos processos de urbanização e de industrialização.

### **Resolução**

a) **Com a promulgação da Lei de Terras, de 1850, criava-se o conceito de propriedade privada da terra, impedindo que os despossuídos, principalmente os escravos libertos, tivessem acesso livre à terra, reduzindo, assim, os conflitos quanto à sua posse. Isso assegurava a preservação hereditária da terra, bem como a estrutura fundiária vigente, baseada no latifúndio. A Lei de Terras, de 1850, levou também a grande maioria dos despossuídos, fossem eles antigos escravos ou imigrantes, a se oferecer apenas como mão de obra assalariada nas condições mais precárias.**

b) **A abolição liberou a antiga mão de obra escrava para atividades desqualificadas nas cidades, dirigindo-se esse trabalhador para funções de baixa remuneração em diversas atividades, como na indústria. A abolição da escravidão criou, assim, um “exército de mão de obra reserva” que pressionou na manutenção dos baixos salários. O fluxo de escravos acabou por intensificar o crescimento das cidades, principalmente nas áreas de uso de solo mais barato, aumentando o número de habitações subnormais como os cortiços, por exemplo.**

## G.03

A concentração da energia solar só acontece com a irradiação solar direta. Locais com uma disponibilidade de irradiação solar anual acima de 2000 kWh/m<sup>2</sup> ano e baixa nebulosidade apresentam potencial para a geração heliotérmica (geração de energia elétrica a partir do aproveitamento térmico da energia solar).

BRASIL: IRRADIAÇÃO SOLAR



Atlas Brasileiro de Energia Solar, INPE, 2<sup>a</sup>. edição, 2017. Adaptado.

Considerando o mapa, responda:

- Qual é a região brasileira com maior potencial heliotérmico para absorção de energia solar? Explique o potencial heliotérmico da região Amazônica.
- Cite duas vantagens da geração heliotérmica de eletricidade e explique uma dessas vantagens em comparação com outras fontes de energia utilizadas para esse fim.

### Resolução

- A região brasileira com maior potencial heliotérmico corresponde ao Sertão Nordestino e Mineiro ou Depressão São Franciscana. A Região Amazônica, com exceção do norte de Roraima, apresenta baixo potencial heliotérmico em razão da elevada nebulosidade, consequência da intensa evapotranspiração de sua densa floresta e dos sistemas atmosféricos da convergência intertropical.

b) São vantagens do modelo heliotérmico de geração de energia: ser renovável e de baixo impacto ambiental. Em comparação com outras fontes de energia, podemos estabelecer as seguintes relações:

As usinas hidroelétricas produzem alto impacto em relação aos recursos hídricos, uma vez que o represamento das águas pode gerar perdas de fauna e de flora, além de alterar o fluxo hídrico e de sedimentos. A nuclear é fonte não renovável e, embora não gere poluição atmosférica, pode provocar graves impactos ambientais devido à possibilidade de acidentes e à destinação do lixo nuclear. A biomassa, apesar de renovável, provoca eliminação de CO<sub>2</sub> na atmosfera por causa da queima de matéria orgânica. O uso de petróleo, fonte não renovável de energia, lança grande quantidade de poluentes na atmosfera. O etanol provoca a expansão do plantio de cana de açúcar, o que colabora para o aumento de queimadas e para a maior concentração fundiária.



## G.04

Estudos sobre os megaeventos esportivos têm demonstrado seu caráter indutor de significativas transformações urbanas nas cidades que sediam os Jogos Olímpicos. Tais intervenções urbanas são realizadas a partir de investimentos financeiros na melhoria de infraestruturas e imagem dessas cidades. De modo geral, esses megaeventos articulam interesses governamentais, industriais e empresariais.

Considerando o exemplo dos Jogos Olímpicos realizados em 2015 na cidade do Rio de Janeiro, atenda ao que se pede.

- a) Explique dois impactos dos Jogos Olímpicos na capital fluminense no que se refere à mercantilização da cidade.
- b) Cite dois exemplos de estratégias urbanas relacionadas aos interesses governamentais e empresariais.

### **Resolução**

a) Entre os impactos gerados pelos Jogos Olímpicos quanto à mercantilização da cidade, pode-se citar a reocupação e o reordenação do espaço urbano, com a eliminação de áreas de ocupação subnormal (favelas) favorecendo a especulação imobiliária. Cita-se também a revitalização das áreas portuárias, o que beneficiou o sistema de transportes e incrementou a atividade turística (como exemplo, a criação dos Museus do Amanhã e do Mar). Também a criação do BRT e do VLT, sistemas de transportes urbanos, facilitou o acesso da população ao trabalho e às áreas de comércio.

b) Entre as estratégias urbanas governamentais e empresariais, podem-se citar alterações nas leis de uso do solo urbano, o que permitiu a revalorização de áreas e a remoção de ocupações subnormais; a construção de vias expressas e ciclovias e as tentativas de pacificação de favelas.

## G.05

O mapa representa a Rodovia Interoceânica, conhecida no Brasil como BR-317. Na parte destacada no retângulo, está o trecho dessa estrada que vem sendo utilizado (de forma mais acentuada, de 2010 a 2015) como porta de entrada para o Brasil, de grupos de migrantes vindos da América Central.



- a) Identifique o país de origem desse fluxo recente e explique, citando uma razão de natureza física e outra social, para a migração.
- b) Explique por que a entrada no Brasil se dá por esse trecho específico da estrada mencionada, considerando, dentre outros elementos, algumas de suas características físicas.

### Resolução

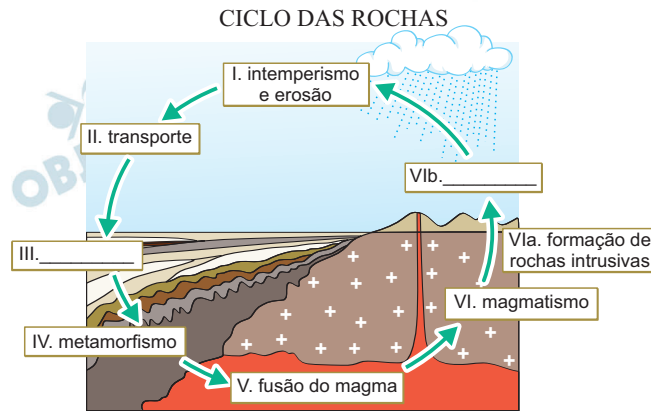
a) O principal país de emigração da América Central para o Brasil é o Haiti. O fator social que explica esse movimento migratório são as precárias condições de vida provocadas por sua economia incipiente; e o fator físico foi o terremoto lá ocorrido em 2010, que ocasionou milhares de desabrigados.

b) A razão pela qual os haitianos optam por utilizar as fronteiras do Peru para adentrar no Brasil é a fiscalização migratória precária e ineficaz. O fator físico que explica a opção de entrada pelo Peru e chegando ao Acre deve-se à presença de rodovias que facilitam a chegada dos haitianos ao centro-Sul do Brasil, ou ainda à densa floresta equatorial que torna as fronteiras vulneráveis.



## G.06

Analise o diagrama.



[cienciasdavidadaterra25.blogspot.com.br/2011/09/ciclo-das-rochas.html](http://cienciasdavidadaterra25.blogspot.com.br/2011/09/ciclo-das-rochas.html). Adaptado.

- Identifique os processos formadores de rochas das fases III e VIb e cite um exemplo de rocha para cada uma dessas fases.
- Explique a relação entre uma das rochas citadas e o relevo característico dessa rocha, utilizando-se de exemplo no Estado de São Paulo.

### Resolução

a) O processo de formação da rocha na fase III, **sedimentar**, tem sua origem na deposição de sedimentos provenientes de outras rochas pré-existentes ou de origem orgânica. Como exemplos, podemos citar a argila, a areia, o arenito, o calcário.

Já a fase VIb refere-se às rochas magmáticas extrusivas, cuja formação ocorre pela solidificação quase que imediata do material magmático em contato com a atmosfera, como por exemplo o basalto.

b) Citamos como exemplos da formação de rocha sedimentar o arenito do Planalto Ocidental Paulista.

Já a rocha magmática extrusiva no estado de São Paulo surge nas bordas orientais das *cuestas* basálticas da depressão periférica.